Kapitel 7

Der Satz von Taylor

Wir haben bereits die Darstellung verschiedener Funktionen, wie der Exponentialfunktion, der Cosinus- oder Sinus-Funktion, durch unendliche Reihen kennen gelernt. In diesem Kapitel betrachten wir nun kurz die Approximation von Funktionen durch Potenzreihen in allgemeiner Form. Eine erste Approximation einer Funktion in einem Punkt aus dem Definitionbereich wurde in Satz 5.2 unter Nutzung der ersten Ableitung eingeführt. Es gilt $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$, wobei die Funktion $\lim\limits_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$. Damit kann f in der Umgebung von a mithilfe von $f(a)$ und $f'(a)$ approximiert werden. Die Taylorsche Formel führt diese Approximation weiter, indem Ableitungen höherer Ordnung (siehe Definition 5.7) benutzt werden.

Satz 7.1 (Taylorsche Formel)**.** *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine in A $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in A$. Dann gilt für alle $x \in A$:*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

wobei es zu jedem $x \in A \setminus \{a\}$ (mindestens) ein $y \in (\min(x,a), \max(x,a))$ gibt, sodass $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Beweis: Es gilt
$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ mit $T_n(x) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.
R_n ist nach Voraussetzung $(n+1)$-mal differenzierbar (da $T_n(x)$ und f $(n+1)$-mal differenzierbar sind). Ferner ist $R_n^{(k)}(a) = 0$ für $0 \leq k \leq n+1$ wie man leicht sehen kann. Da $T_n(x)$ eine Polynomfunktion vom Grade n ist, ist $T_n^{(n+1)}(x) = 0$.
Außerdem gilt

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(a)}{(x-a)^{n+1} - (a-a)^{n+1}}$$

da $R_n(a) = (a-a) = 0$. Nach dem zweiten Mittelwertsatz (Satz 5.19) existiert ein $y_1 \in (\min(a,x), \max(a,x))$, sodass

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n^{(1)}(y_1)}{((y_1-a)^{n+1})'} = \frac{R_n^{(1)}(y_1)}{(n+1)(y_1-a)^n}.$$

Falls $n > 1$ können wir diese Idee noch einmal anwenden. Die erneute Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes liefert ein $y_2 \in (\min(a, y_1), \max(a, y_1))$, sodass

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n^{(1)}(y_1)}{(n+1)(y_1-a)^n} = \frac{R_n^{(2)}(y_2)}{(n+1)n(y_2-a)^{n-1}}.$$

Dieses Vorgehen lässt sich $(n+1)$-mal wiederholen und wir erhalten schließlich

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(y_{n+1})}{(n+1)!}.$$

für ein $y_{n+1} \in (\min(a, x), \max(a, x))$. Damit gilt auch

$$R_n^{(n+1)}(y_{n+1}) = f^{(n+1)}(y_{n+1}) - T_n^{(n+1)}(y_{n+1}) = f^{(n+1)}(y_{n+1}),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Für beliebig oft differenzierbare Funktionen kann man die Taylor-Reihe definieren.

Definition 7.2 (Taylor-Reihe). *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion in $a \in A$. Dann heißt*

$$T[f, a](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die Taylor-Reihe *von f im (Entwicklungs-)Punkt a*[1].

Wenn die Summation nach n Schritten abgebrochen wird erhalten wir

$$T_n[f, a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ .$$

$T_n[f, a](x)$ bezeichnen wir als Taylor-Polynom vom Grad n mit Entwicklungspunkt a. Taylor-Reihen und der Satz von Taylor mit seiner endlichen Summation sind wichtige Hilfsmittel, die insbesondere bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen eine große praktische Bedeutung haben. Die folgenden Bemerkungen zeigen aber, dass die Approximation von Funktionen durch Taylor-Reihen nicht in jedem Fall und insbesondere nicht ohne weitere Informationen über die Funktion, den Entwicklungspunkt und den zu berechnenden Punkt erfolgen kann.

- Die Taylor-Reihe muss für $x \neq a$ nicht konvergieren. D.h. sie kann einen Konvergenzradius (vgl. (3.8.1)) von 0 haben.

- Auch wenn die Taylor-Reihe von f im Punkte x konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.

- Die Taylor-Reihe konvergiert genau für die $x \in A$ gegen $f(x)$, für die das Restglied $R_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

[1] Es gilt natürlich $0! =!$. Falls $x = a$ ist, definieren wir $(x-a)^0 = 1$ und $(x-a)^k = 0$ für $k > 0$, so dass $T_0[f, a](a) = T_n[f, a](a) = f^{(0)}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 7.1. *Wir entwickeln die Taylor-Reihe für $f(x) = \ln(x+1)$ im Entwicklungspunkt 0.*
Es gilt $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, da $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ und $(x+1)' = 1$ und mithilfe der Kettenregel (Satz 5.6) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ die Ableitung folgt.
Ferner gilt $f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$ und allgemein $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(x+1)^k}$. Damit ist

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + R_n(x).$$

Da $f(0) = \ln(1) = 0$, können wir diesen Term weglassen. Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium (Satz 3.33) für $|x| < 1$, da

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(-1)^{k+2} \cdot x^{k+1} \cdot k}{(-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot x^k} \right| = \frac{k}{k+1} \cdot |x| < |x| < 1.$$

Für $x = 1$ entsteht die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, die nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 3.28) konvergiert.
Für das Restglied gilt

$$R_n(x) = (-1)^{n+2} \frac{n!}{(y+1)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \left(\frac{x}{y+1} \right)^{n+1}.$$

Falls $x > 0$ gilt $y \in (0, x)$ und damit gilt $\left| \frac{x}{1+y} \right| < 1$ für $x \in (0, 1)$ und damit auch $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Um zu zeigen, dass das Restglied auch für $x \in (-1, 0)$ und $x = 1$ gegen 0 konvergiert, benötigen wir eine andere Art der Darstellung des Restgliedes, die wir hier aber nicht einführen werden. Insofern sei für diese Beweise auf die einschlägigen Lehrbücher verwiesen.
Den Verlauf der Approximationen der Funktion durch $T_n(0)$ wird in Abbildung 7.1 veranschaulicht. Es wird deutlich, dass die Approximation für betragsmäßig kleine x mit wachsendem n immer genauer zu werden scheint. Dies gilt aber für größere x anscheinend nicht, wie der Verlauf von $T_1(0)$ und $T_3(0)$ zeigt. Dies entspricht der Beobachtung, dass der Konvergenzradius 1 ist und damit für $x > 1$ die Reihe nicht konvergiert.

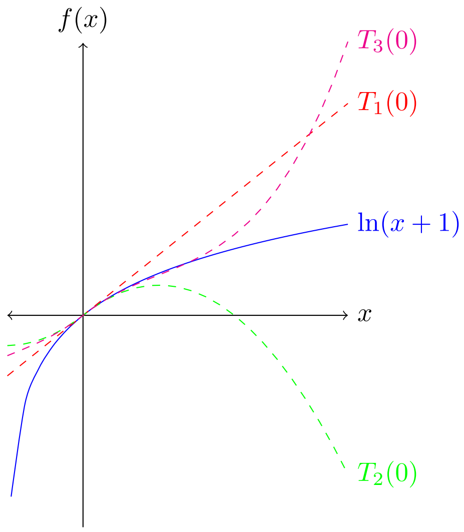

Abbildung 7.1: Verlauf der Funktion $\ln(x+1)$ sowie der Verläufe von $T_n(0)$ für $n = 1, 2, 3$.

Beispiel 7.2. *Als weiteres Beispiel entwickeln wir die Taylor-Reihe für* $f(x) = \cos(x)$ *im Entwicklungspunkt* $a = 0$.
Die Ableitungen lauten $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f^{(3)}(x) = \sin(x)$ *und* $f^{(4)}(x) = \cos(x)$. *Ferner gilt* $\sin(0) = 0$ *und* $\cos(0) = 1$. *Wir erhalten für die Taylor-Reihe*

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = f(0) + \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_n(x)$$

Die Darstellung lässt sich herleiten, wenn man berücksichtigt, dass $\sin(0) = 0$ *und damit jeder zweite Term in der Summe wegfällt (nachvollziehen!). Wir schauen uns nun das Restglied an. Sei* $n = 2m$, *also gerade, dann ist*

$$R_{2m}(x) = (-1)^{m+1} \frac{\sin(y)}{(2m+1)!} x^{2m+1} \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Falls $n = 2m - 1$, *also ungerade, dann ist*

$$R_{2m-1}(x) = (-1)^m \frac{\cos(y)}{(2m)!} x^{2m} \leq \frac{|x|^{2m}}{(2m)!}.$$

Die Schranken gelten für alle y, *da* $\cos(x)$ *und* $\sin(x)$ *nur Werte im Intervall* $[-1, 1]$ *annehmen können. Damit gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ *für alle* x.

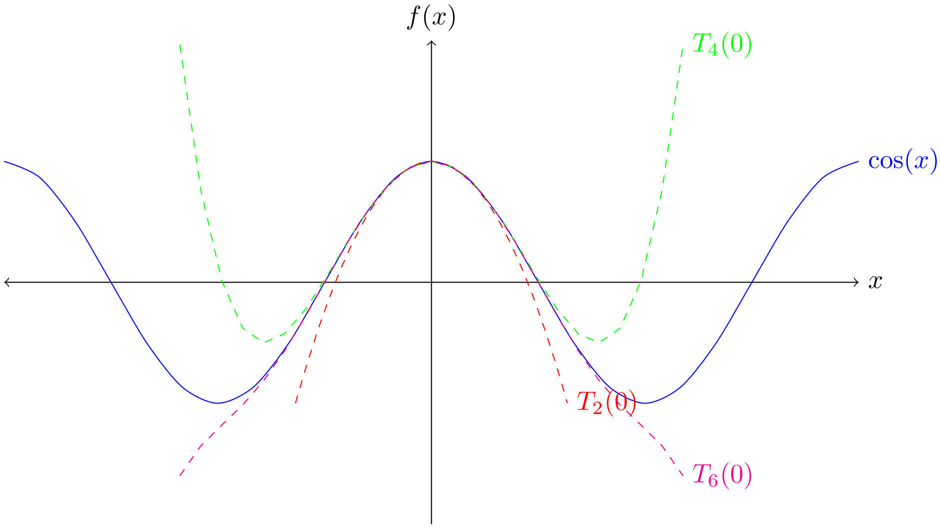

Abbildung 7.2: Verlauf der Funktion $\cos(x)$ sowie der Verläufe von $T_n(0)$ für $n = 2, 4, 6$.

Der Verlauf der Funktion $\cos(x)$ *und der Taylorpolynome* $T_n(0)$ *für* $n = 2, 4, 6$ *wird in Abbildung 7.2 gezeigt. Es wird deutlich, dass mit* $T_6(0)$ *eine relativ gute Approximation im Intervall* $(-\pi, \pi)$ *erreicht wird, danach de Verlauf der Funktion aber nicht mehr gut approximiert wird. Dies wird auch aus der Fehlerschranke deutlich, die für* $T_6(0)$ $\frac{|x|^7}{5040}$ *lautet und damit zum Beispiel bei* 1.5π *gleich* 10.24 *ist, während die Fehlerschranke für* π *nur den Wert* 0.6 *hat. Dies zeigt, dass zur Approximation des periodischen Verlaufs der Cosinus-Funktion über mehrere Perioden Taylor-Polynome eines deutlich höheren Grades verwendet werden müssen. Bei der praktischen Berechnung kann man sich aber die Periodizität der Cosinus-Funktion zunutze machen, so dass nur Werte aus dem Intervall* $(-\pi, \pi)$ *berechnet werden müssen.*