5. Differenzierbare Funktionen

Kapitelgliederung

5.1 Differenzierbarkeit einer Funktion
5.2 Differentiations-Regeln
5.3 Ableitungen höherer Ordnung
5.4 Numerisches Differenzieren
5.5 Lokale Extrema und Mittelwertsätze
5.6 Kurvendiskussion

5.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Definition 5.1 (Differenzierbarkeit)

*Sei $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **in** a **differenzierbar**, falls der Grenzwert*

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

Satz 5.2

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *ist in einem Häufungspunkt* $a \in A$ *genau dann differenzierbar, wenn es eine Konstante* $c \in \mathbb{R}$ *gibt, sodass*

$$f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + r(x)$$

für $x \in A$ *und* $r(x)$ *eine Funktion mit der Eigenschaft*

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} \frac{r(x)}{x - a} = 0$$

ist. Es gilt in diesem Fall $c = f'(a)$.

Satz 5.2

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) ist in einem Häufungspunkt $a \in A$ genau dann differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + r(x)$$

für $x \in A$ und $r(x)$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} \frac{r(x)}{x - a} = 0$$

ist. Es gilt in diesem Fall $c = f'(a)$.

Beweisidee

„$\Rightarrow$“ Falls f diff'bar, dann $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{r(x)}{x-a} = 0$ zeigen.

„$\Leftarrow$“ Def. der Diff'barkeit ergibt sich genau aus den Grenzwerten. $\square$

Satz 5.3 (Stetigkeit - Differenzierbarkeit)

Ist die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ in $a \in A$ differenzierbar, so ist sie in $a \in A$ auch stetig.

Satz 5.3 (Stetigkeit - Differenzierbarkeit)

Ist die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ in $a \in A$ differenzierbar, so ist sie in $a \in A$ auch stetig.

Beweisidee

Nutzung der Darstellung aus Satz 5.2. $\square$

5.2 Differentiations-Regeln

Satz 5.4 (Algebraische Operationen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ *in* $a \in A$ *differenzierbar und* $c \in \mathbb{R}$. *Dann sind auch die Funktionen* $f + g, c \cdot f, f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ *in a differenzierbar und es gelten folgende Rechenregeln:*

i) *Linearität:* $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$

ii) *Produktregel:* $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

Ist ferner $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in A$, *so ist auch die Funktion* $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und es gilt:*

iii) *Quotientenregel:* $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Satz 5.4 (Algebraische Operationen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ *in* $a \in A$ *differenzierbar und* $c \in \mathbb{R}$. *Dann sind auch die Funktionen* $f + g, c \cdot f, f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ *in a differenzierbar und es gelten folgende Rechenregeln:*

- *i) Linearität:* $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
  $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$
- *ii) Produktregel:* $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

Ist ferner $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in A$, *so ist auch die Funktion* $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und es gilt:*

- *iii) Quotientenregel:* $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Beweisidee

Betrachtung der kombinierten Grenzwerte. □

Satz 5.5 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $g = f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ mit $J = f(I)$ deren Umkehrfunktion.
Ist f in $a \in I$ differenzierbar und gilt $f'(a) \neq 0$, so ist g in $b = f(a)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))} .$$

Satz 5.5 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $g = f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ mit $J = f(I)$ deren Umkehrfunktion.
Ist f in $a \in I$ differenzierbar und gilt $f'(a) \neq 0$, so ist g in $b = f(a)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))} .$$

Beweisidee

Nutzung der Stetigkeit von g und Einsetzen der Grenzwerte in die Definition der Ableitung. □

Satz 5.6 (Kettenregel)

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ *und* $g : B \to \mathbb{R}$ $(A, B \subseteq \mathbb{R})$ *Funktionen.*
Sei f *in* $a \in A$ *differenzierbar und* g *sei in* $b = f(a)$ *differenzierbar.*
Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$
in Punkt $a \in A$ *differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \; .$$

Satz 5.6 (Kettenregel)

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) Funktionen.
Sei f in $a \in A$ differenzierbar und g sei in $b = f(a)$ differenzierbar.
Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$
in Punkt $a \in A$ differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \, .$$

Beweisidee

Definition einer Hilfsfunktion

$$g^*(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} & , \text{ falls } y \neq b \\ g'(b) & , \text{ falls } y = b \, . \end{cases}$$

und Einsetzen von $g^*(x)$ in den Grenzwert. □

5.3 Ableitungen höherer Ordnung

Definition 5.7 (Ableitung höherer Ordnung)

*Sei $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist die k-**te Ableitung** (oder **Ableitung** k-**ter Ordnung**) von f in $a \in A$ definiert als $f^{(k)}(a)$ (f oben k, $k \in \mathbb{N}_0$) mit*

1. $f^{(0)}(a) = f(a)$
2. $f^{(k+1)}(a) = (f^{(k)}(a))' : A \to \mathbb{R}$, *falls die Ableitung von* $f^{(k)}(a)$ *in* $a \in A$ *existiert.*

Satz 5.8 (Operationen auf Ableitungen)

Sei $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar.

1. *Dann sind $f + g$, $f - g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ und falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$ $\frac{f}{g}$ k-mal differenzierbar und es gilt:*

   i) $(f+g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a)$

   ii) $(f-g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)$

   iii) $(cf)^{(k)}(a) = cf^{(k)}(a)$

   iv) $(fg)^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(a) \cdot g^{(k-i)}(a)$
   (Leibnizsche Formel)

   v) $\left(\frac{f}{g}\right)^{(k)}(a) = \dfrac{f^{(k)}(a) - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{f}{g}\right)^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a)}{g(a)}$

Satz 5.8 (Fortsetzung)

2. *Ist ferner* $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ *und* $g : B \to \mathbb{R}$ *k-mal differenzierbar, so ist auch* $(g \circ f)$ *k-mal differenzierbar.*

Satz 5.8 (Fortsetzung)

2. *Ist ferner* $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ *und* $g : B \to \mathbb{R}$ *k-mal differenzierbar, so ist auch* $(g \circ f)$ *k-mal differenzierbar.*

Beweisidee

Rekursive Anwendung der Differentiationsregel. □

5.4 Numerisches Differenzieren

Approximation der Ableitung durch

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

oder

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

für festes $h > 0$

Auftretende Fehler:

1. Approximationsfehler
2. Rundungsfehler

$$\exp'(1) \approx \frac{\exp(1+h) - \exp(1)}{h},$$

h	**Berechneter Wert**	**Fehler**
$1.0e+0$	4.6707742704716068	$1.9524924420125607e+0$
$1.0e-2$	2.7319186557871245	$1.3636827328079359e-2$
$1.0e-4$	2.7184177470829241	$1.3591862387896114e-4$
$1.0e-6$	2.7182831874306141	$1.3589715690542903e-6$
$1.0e-8$	2.7182818218562939	$-6.6027512346522599e-9$
$1.0e-10$	2.7182833761685279	$1.5477094827964777e-6$
$1.0e-12$	2.7187141427020829	$4.3231424303780130e-4$
$1.0e-14$	2.7089441800853815	$-9.3376483736635763e-3$
$1.0e-16$	0.0000000000000000	$-2.7182818284590451e+0$

$$\exp'(1) \approx \frac{\exp(1+h) - \exp(1-h)}{2h} ,$$

h	**Berechneter Wert**	**Fehler**
$5.0e-1$	2.8329677996379363	$1.1468597117889123e-1$
$5.0e-3$	2.7182931546474443	$1.1326188399163328e-5$
$5.0e-5$	2.7182818295923283	$1.133283245025040 7e-9$
$5.0e-7$	2.7182818285176320	$5.858691309867936 1e-11$
$5.0e-9$	2.7182818218562939	$-6.6027512346522599e-9$
$5.0e-11$	2.7182833761685279	$1.5477094827964777e-6$
$5.0e-13$	2.7182700534922328	$-1.1774966812261312e-5$
$5.0e-15$	2.7533531010703878	$3.5071272611342685e-2$
$5.0e-17$	0.0000000000000000	$-2.7182818284590451e+0$

5.5 Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Definition 5.9 (Lokale Extrema)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann hat f in $x \in (a, b)$ ein ***lokales Maximum*** *(bzw.* ***lokales Minimum****), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$) für alle y mit $|x - y| < \varepsilon$ gilt.*

Gilt sogar $f(x) > f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$) für alle $y \neq x$ mit $|x - y| < \varepsilon$ so spricht man von einem ***strikten lokalen Maximum*** *(bzw.* ***striktem lokalen Minimum****).*

Satz 5.10 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *besitze im Punkt* $x \in (a, b)$ *ein lokales Extremum und sei in* x *differenzierbar. Dann ist* $f'(x) = 0$.

Satz 5.10 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.

Beweisidee

Zeigen, dass der Grenzwert in eine Richtung kleiner und in die andere Richtung größer 0 ist. $\square$

Satz 5.11 (Satz von Rolle)

Sei $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(a) = f(b)$*.*
Wenn die Funktion f *in* (a, b) *differenzierbar ist, dann existiert ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f'(c) = 0$*.*

Satz 5.11 (Satz von Rolle)

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Wenn die Funktion f in (a, b) differenzierbar ist, dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.

Beweisidee

Es muss ein lokales Extremum im Intervall existieren, dort ist die Ableitung gleich 0 (nach Satz 5.10). □

Satz 5.12 (Mittelwertsatz)

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a, b)$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

Satz 5.12 (Mittelwertsatz)

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a, b)$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

Beweisidee

Definition einer Hilfsfunktion, so dass der Satz aus Satz 5.11 folgt. □

Korollar 5.13

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige und in* (a, b) *differenzierbare Funktion mit* $K^- \leq f'(x) \leq K^+$ *für alle* $x \in (a, b)$ *und* $K^-, K^+ \in \mathbb{R}$.

Für alle $c, d \in [a, b]$ *mit* $c \leq d$ *gilt dann*

$$K^-(d - c) \leq f(d) - f(c) \leq K^+(d - c)\,.$$

Satz 5.14 (Monotonie von Funktionen)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar.

i) f *ist in* $[a,b]$ *monoton wachsend* $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b) : f'(x) \geq 0$.

ii) f *ist in* $[a,b]$ *monoton fallend* $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b) : f'(x) \leq 0$.

iii) $\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ <u>*streng*</u> *monoton wachsend.*

iv) $\forall x \in (a,b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ <u>*streng*</u> *monoton fallend.*

Satz 5.14 (Monotonie von Funktionen)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und in* (a, b) *differenzierbar.*

i) f *ist in* $[a, b]$ *monoton wachsend* $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0.$

ii) f *ist in* $[a, b]$ *monoton fallend* $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0.$

iii) $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *streng monoton wachsend.*

iv) $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *streng monoton fallend.*

Beweisidee

Nutzung des Mittelwertsatzes 5.12 der den Zusammenhang zwischen den Funktionswerten und der Ableitung herstellt. $\square$

Satz 5.15 (Strenges lokales Maximum/Minimum)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion, die im Punkt* $x \in (a, b)$ *zweimal differenzierbar ist.*

Falls $f'(x) = 0$ *und* $f''(x) > 0$ *(bzw.* $f''(x) < 0$*),*
dann besitzt f *in* x *ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).*

Satz 5.15 (Strenges lokales Maximum/Minimum)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die im Punkt $x \in (a, b)$ zweimal differenzierbar ist.

Falls $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$), dann besitzt f in x ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).

Beweisidee

Für ein strenges lokales Minimum zeigen, dass f streng monoton fallend in $(x - \varepsilon, x)$ und streng monoton wachsend in $(x, x + \varepsilon)$ unter Nutzung von Satz 5.14. □

Satz 5.16

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion, die im Punkt* $x \in (a, b)$ $n+1$*mal differenzierbar ist. Falls* $f'(x) = f^{(2)}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0$ *und* $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, *dann besitzt* f *in* x

i) *ein strenges lokales Minimum, falls* n *ungerade ist und* $f^{(n+1)}(x) > 0$,

ii) *ein strenges lokales Maximum, falls* n *ungerade ist und* $f^{(n+1)}(x) < 0$,

iii) *kein Extremum, falls* n *gerade ist.*

Satz 5.16

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion, die im Punkt* $x \in (a, b)$ $n + 1$*mal differenzierbar ist. Falls* $f'(x) = f^{(2)}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0$ *und* $f^{(n+1)}(x) \neq 0$*, dann besitzt* f *in* x

i) *ein strenges lokales Minimum, falls* n *ungerade ist und* $f^{(n+1)}(x) > 0$,

ii) *ein strenges lokales Maximum, falls* n *ungerade ist und* $f^{(n+1)}(x) < 0$,

iii) *kein Extremum, falls* n *gerade ist.*

Beweisidee

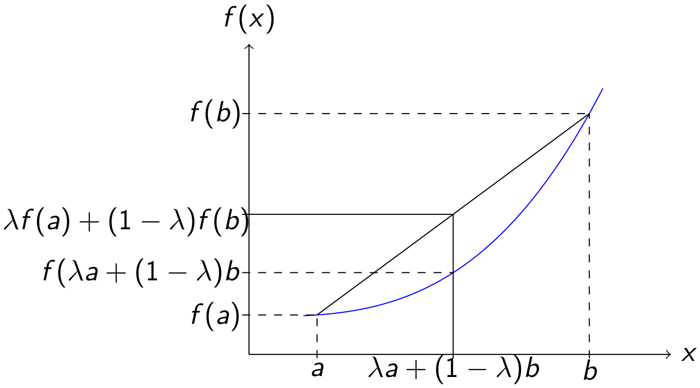
Über die Taylorreihenentwicklung der Funktion f, die wir in Kapitel 7 kennen lernen. $\square$

Definition 5.17

Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt ***konvex****, wenn für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Die Funktion heißt ***konkav****, falls $-f$ konvex ist.*


$f(x)$
$f(b)$
$\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$
$f(\lambda a + (1-\lambda)b$
$f(a)$
x
a
$\lambda a + (1-\lambda)b$
b

Satz 5.18

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.

f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Satz 5.18

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.

f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Beweisidee

Jeweils eine Richtung beweisen.
Wenn die zweite Ableitung nicht-negativ ist, ist die erste Ableitung monoton wachsend, woraus man mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Konvexität ableiten kann.
Wenn f konvex ist, zeigt man per Widerspruchsbeweis, dass die zweite Ableitung nicht negativ werden kann. $\square$

Satz 5.19 (Zweiter Mittelwertsatz)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei Funktionen, die auf* $[a, b]$ *stetig und auf* (a, b) *differenzierbar sind. Sei ferner* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$, *dann ist* $g(a) \neq g(b)$ *und es existiert ein* $c \in (a, b)$ *mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Satz 5.19 (Zweiter Mittelwertsatz)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei Funktionen, die auf* $[a, b]$ *stetig und auf* (a, b) *differenzierbar sind. Sei ferner* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$*, dann ist* $g(a) \neq g(b)$ *und es existiert ein* $c \in (a, b)$ *mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Beweisidee

Mit Hilfe von Satz 5.11 zeigt man, dass $g(a) \neq g(b)$ gilt.
Im zweiten Schritt wird eine Hilfsfunktion definiert, auf die wieder Satz 5.11 angewendet werden kann, um den Rest zu zeigen. $\square$

Satz 5.20 (Regel von L'Hospital $\frac{0}{0}$)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktionen. Sei $c \in [a, b]$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.

Gilt $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, so existiert auch $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Satz 5.20 (Regel von L'Hospital $\frac{0}{0}$)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktionen. Sei $c \in [a, b]$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.

Gilt $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ und existiert $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, so existiert auch $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweisidee

Grenzwertbetrachtungen, die zeigen, dass

$$\frac{f(x_i)}{g(x_i)} = \frac{f'(x_{i+1})}{g'(x_{i+1})}$$

für $x_{i+1} \in (x_i, c)$. $\square$

Definition 5.21 (Uneigentlicher Grenzwert)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von A. Falls für alle $K \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $f(x) > K$ für $|x - a| < \delta$, so schreibt man $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Falls $\lim\limits_{x \to a} -f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Satz 5.22 (Regel von L'Hospital $\frac{\infty}{\infty}$)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei auf* $[a, b]$ *stetig und auf* (a, b) *differenzierbare Funktionen. Sei* $c \in [a, b]$ *und* $g'(x) \neq 0$ *für* $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.

Gilt $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$ *und existiert* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *so existiert auch* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *und es gilt* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Satz 5.22 (Regel von L'Hospital $\frac{\infty}{\infty}$)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei auf* $[a, b]$ *stetig und auf* (a, b) *differenzierbare Funktionen. Sei* $c \in [a, b]$ *und* $g'(x) \neq 0$ *für* $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.

Gilt $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$ *und existiert* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *so existiert auch* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *und es gilt* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweisidee

Anwendung von Satz 5.20 auf $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ und $G(x) = \frac{1}{g(x)}$. $\square$

5.6 Kurvendiskussion

Punkte der Kurvendiskussion einer Funktion $f : A \to \mathbb{R}$:

1. Symmetrie
2. Verhalten am Rand des Definitionsbereichs
3. Nullstellen
4. Extrempunkte
5. Wendepunkte
6. Funktionsgraph

1. Symmetrie
   Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$
   Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$
   In beiden Fällen muss $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$ gelten!
2. Verhalten am Rand
   - Interessant sind Häufungspunkte $a \notin A$ und
   - bei unbeschränktem A das Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$

   Asymptote
   Verhalten für $x \to \infty$ beschrieben durch Gerade $g(x) = \alpha x + \beta$, so dass $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
   Es gilt:
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \text{ und } \lim_{x\to\infty}(f(x) - \alpha x) = \beta$$
   (analog für $x \to -\infty$)

3. Bestimmung von Nullstellen
   Berechne $f(x) = 0$ (siehe nächstes Kapitel)

4. Berechnung von Extrempunkten
   Notwendige Bedingung für lokalen Extrempunkt $a \in A$:

   $f'(a) = 0$ falls Umgebung $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq A$ für $\epsilon > 0$ existiert

   Hinreichende Bedingung

   $f''(a) < 0$ für lokales Maximum, $f''(a) > 0$ für lokales Minimum
   (weitergehende hinreichende Bedingungen siehe Satz 5.16)

   Punkte "am Rand" von A separat untersuchen

5. Wendepunkte

Punkt $a \in A$, so dass $\epsilon > 0$ existiert und $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subseteq A$, sowie

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (a-\varepsilon, a) \\ = 0 & \text{für } x = a \\ > 0 & \text{für } x \in (a, a+\varepsilon) \end{cases} \qquad \text{oder}$$

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (a-\varepsilon, a) \\ = 0 & \text{für } x = a \\ < 0 & \text{für } x \in (a, a+\varepsilon) \end{cases}$$

<u>Hinreichende Bedingung:</u> $f''(a) = 0$ und $f^{(3)}(a) \neq 0$.