Fundamente der Computational Intelligence
– Teil 4 –

Günter Rudolph
Fachbereich Informatik, Lehrstuhl XI
Fachgebiet *Computational Intelligence*

WS 2006/07

Fuzzy Relationen

Relationen mit scharfen Mengen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$:

$$R(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n) \subseteq \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$$

Da kartesisches Produkt eine Menge ist
$\Rightarrow$ alle Mengenoperationen bleiben gültig!

Scharfe Zugehörigkeitsfunktion (von x zur Relation R)

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fuzzy Relationen

Fuzzy Relation :=
Fuzzy-Menge auf scharfem kartesischen Produkt
$\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$

Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ haben verschiedene Zugehörigkeitsgrade zur Relation

Zugehörigkeitsgrad beschreibt Stärke der Relation zwischen Elementen des Tupels

Geeignete Darstellung: n-dim. Zugehörigkeitsmatrix

Fuzzy Mengen: Beispiel

Sei
$\mathcal{X} = \{$New York, Paris$\}$ und
$\mathcal{Y} = \{$Bejing, New York, Dortmund$\}$.

Relation R soll „sehr weit entfernt“ repräsentieren

Zugehörigkeitsmatrix (Z-Matrix):

	New York	Paris
Bejing	1.0	0.9
New York	0.0	0.7
Dortmund	0.6	0.3

Binäre Fuzzy Relation

Definition

dom R ist Fuzzy-Menge über $\mathcal{X}$ mit

$$\forall x \in \mathcal{X} : (\text{dom}\, R)(x) = \max_{y \in \mathcal{Y}} R(x, y)$$

$\square$

Also:

Jedes $x \in \mathcal{X}$ gehört zur Domain von R im Grade gleich der Stärke der stärksten Beziehung zu irgendeinem Mitglied von $\mathcal{Y}$

Definition

ran R ist Fuzzy-Menge über $\mathcal{Y}$ mit

$$\forall y \in \mathcal{Y} : (\text{ran}\, R)(y) = \max_{x \in \mathcal{X}} R(x, y)$$

$\square$

Also:
Die Stärke der stärksten Beziehung, die jedes Element von $\mathcal{Y}$ zu einem Element in $\mathcal{X}$ hat ist gleich dem Zugehörigkeitsgrad im Wertebereich (range) von R.

(dom R)(x) und (ran R)(x): Beispiel

	New York	Paris
Bejing	1.0	0.9
New York	0.0	0.7
Dortmund	0.6	0.3

(dom R)(x) = $\max\{R(x,y) : y \in \mathcal{Y}\}$ = (1.0, 0.9)

(Spaltenmaxima)

(ran R)(x) = $\max\{R(x,y) : x \in \mathcal{X}\}$ = $(1.0, 0.7, 0.6)^T$

(Zeilenmaxima)

Binäre Fuzzy Relationen

Definition
Die zur Fuzzy-Relation $R(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ inverse Fuzzy-Relation $R^{-1}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ ist eine Fuzzy-Relation auf $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ mit Zugehörigkeitsmatrix $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. $\square$

$\mathbf{R}^T$ ist die transponierte Matrix von Z-Matrix $\mathbf{R}$

Offensichtlich gilt: $\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{R}$ wg. $\left(\mathbf{R}^T\right)^T = \mathbf{R}$

Max-min-Komposition von Fuzzy-Relationen

Seien $P(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und $Q(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ zwei Fuzzy-Relationen.

$$R(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) = P(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \circ Q(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$$

mit

$$\begin{aligned} R(x, z) &= (P \circ Q)(x, z) \\ &= \max_{y \in \mathcal{Y}} \min\{P(x, y), Q(y, z)\} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathcal{X}$ und $z \in \mathcal{Z}$. $\square$

Binäre Fuzzy Relationen

Satz

Es gilt:

a) $(P(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \circ Q(\mathcal{Y},\mathcal{Z}))^{-1} = Q^{-1}(\mathcal{Z},\mathcal{Y}) \circ P^{-1}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$

b) max-min-Komposition ist assoziativ

c) max-min-Komposition ist nicht kommutativ $\square$

Binäre Fuzzy Relationen

max-min-Komposition läßt sich berechnen durch
Fuzzy-Matrizenrechnung: $\mathbf{R} = \mathbf{P} \circ \mathbf{Q}$

$$r_{ij} = \max_k \min\{p_{ik}, q_{kj}\}$$

zum Vergleich:
scharfe Matrizenrechnung $\mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$

$$r_{ij} = \sum_k p_{ik} \cdot q_{kj}$$

Binäre Fuzzy Relationen

Beispiel:

$\mathbf{R} = \mathbf{P} \circ \mathbf{Q}$	$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 1.0 & 0.9 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 & 0.9 & 0.5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} r_{23} &= \max\{\min\{p_{21}, q_{13}\}, \min\{p_{22}, q_{23}\}, \min\{p_{23}, q_{33}\}\} \\ &= \max\{\min\{0.9, 0.9\}, \min\{0.7, 0.2\}, \min\{0.8, 0.0\}\} \\ &= \max\{0.9, 0.2, 0.0\} \;=\; 0.9 \end{aligned}$$

Max-prod-Komposition

$$(P \odot Q)(x,z) = \max_{y \in \mathcal{Y}} \{ P(x,y) \cdot Q(y,z) \}$$

(Beispiel)

$$\begin{pmatrix} 0,21 & 0,18 & 0,27 & 0,10 \\ 0,80 & 0,56 & 0,81 & 0,35 \end{pmatrix}$$

<u>Verallgemeinerung:</u> sup-t-Komposition

$$(P \circ Q)(x,z) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \{ t(P(x,y), Q(y,z)) \}, \quad \text{wobei } t(\cdot,\cdot) \text{ t-Norm}$$

Bsp.: t(a,b) = min{a, b} $\Rightarrow$ max-min-Komposition

t(a,b) = a · b $\Rightarrow$ max-prod-Komposition

Weitere Operationen: Relationaler Join

$$(P * Q)(x,y,z) = \min_{y \in \mathcal{Y}} \{ P(x,y) \cdot Q(y,z) \}$$

Es gilt:

$$(P \circ Q)(x,z) = \max_{y \in \mathcal{Y}} \{ (P * Q)(x,y,z) \}$$

Binäre Fuzzy-Relationen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$: Eigenschaften

- **reflexiv** $\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathcal{X}: R(x,x) = 1$
- **irreflexiv** $\Leftrightarrow \exists\, x \in \mathcal{X}: R(x,x) < 1$
- **antireflexiv** $\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathcal{X}: R(x,x) < 1$

- **symmetrisch** $\Leftrightarrow \forall\, (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}: R(x,y) = R(y,x)$
- **asymmetrisch** $\Leftrightarrow \exists\, (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}: R(x,y) \neq R(y,x)$
- **antisymmetrisch** $\Leftrightarrow \forall\, (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}: R(x,y) \neq R(y,x)$

- **transitiv** $\Leftrightarrow \forall\, (x,z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}: R(x,z) \geq \max\limits_{y \in \mathcal{Y}} \min \{ R(x,y), R(y,z) \}$
- **intransitiv** $\Leftrightarrow \exists\, (x,z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}: R(x,z) < \max\limits_{y \in \mathcal{Y}} \min \{ R(x,y), R(y,z) \}$
- **antitransitiv** $\Leftrightarrow \forall\, (x,z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}: R(x,z) < \max\limits_{y \in \mathcal{Y}} \min \{ R(x,y), R(y,z) \}$

Genauer: max-min-Transitivität ($\rightarrow$ allgemein: sup-t-Transitivität)

Binäre Fuzzy-Relationen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$: <u>Beispiel</u>

Sei $\mathcal{X}$ die Menge aller Städte in Deutschland.

Die Fuzzy-Relation R soll das Konzept „sehr nah“ repräsentieren.

- R(x,x) = 1, da eine Stadt zu sich selbst sicher sehr nah ist.

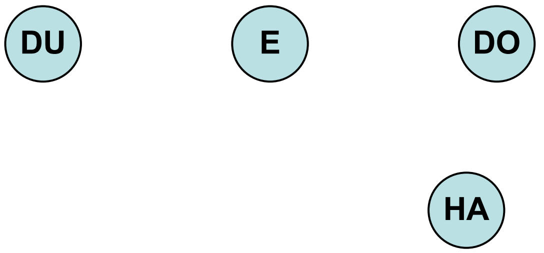
  $\Rightarrow$ **reflexiv**

- R(x,y) = R(y,x): wenn Stadt x sehr nah zu Stadt y, dann auch umgekehrt.

  $\Rightarrow$ **symmetrisch**

- R(Dortmund, Essen) = 0.8
  R(Essen, Duisburg) = 0.7
  R(Dortmund, Duisburg) = 0.5
  R(Dortmund, Hagen) = 0.9

  $\Rightarrow$ **intransitiv**



Scharf:
Relation R ist <u>Äquivalenzrelation</u> ⇔ R reflexiv, symmetrisch, transitiv

Unscharf:
Relation R ist <u>Ähnlichkeitsrelation</u> ⇔ R reflexiv, symmetrisch, (max-min-) transitiv

Bsp:

	a	b	c	d	e	f	g
a	1,0	0,8	0,0	0,4	0,0	0,0	0,0
b	0,8	1,0	0,0	0,4	0,0	0,0	0,0
c	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,9	0,5
d	0,4	0,4	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
e	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,9	0,5
f	0,0	0,0	0,9	0,0	0,9	1,0	0,5
g	0,0	0,0	0,5	0,0	0,5	0,5	1,0