Wintersemester 2005/06

Fundamente der Computational Intelligence

(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph

Fachbereich Informatik

Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Nachtrag zur Genotyp-Phänotyp-Abbildung $\mathbb{B}^n \to [L, R] \subset \mathbb{R}$

- Standardkodierung für $b \in \mathbb{B}^n$

$$x = L + \frac{R - L}{2^n - 1} \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-i}\, 2^i$$

→ Problem: Hammingklippen (*hamming cliffs*)

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7

$L = 0$, $R = 7$

$n = 3$

1 Bit   2 Bit   1 Bit   3 Bit   1 Bit   2 Bit   1 Bit

↑

Hammingklippe

Nachtrag zur Genotyp-Phänotyp-Abbildung $\mathbb{B}^n \to [L, R] \subset \mathbb{R}$

- Graykodierung für $b \in \mathbb{B}^n$

Sei $a \in \mathbb{B}^n$ standardkodiert. Dann $b_i = \begin{cases} a_i, & \text{falls } i = 1 \\ a_{i-1} \oplus a_i, & \text{falls } i > 1 \end{cases}$

$\oplus$ = XOR

000	001	011	010	110	111	101	100	← Genotyp
0	1	2	3	4	5	6	7	← Phänotyp

OK, keine Hammingklippen mehr …

$\Rightarrow$ kleine Änderungen im Phänotyp „bewirken“ kleine Änderungen im Genotyp

Wir wollen jedoch wegen Evolution a la Darwin (nicht Lamarck):

$\Rightarrow$ kleine Änderungen im Genotyp bewirken kleine Änderungen im Phänotyp

aber: 1-Bit-Änderung: `000` $\to$ `100` $\Rightarrow$ ☹

Testen und Statistik

Evolutionäre Algorithmen haben viele **Freiheitsgrade**:

- **Mutation**: Mutationsregel, Mutationsw'keit, Mutationsverteilung?
- **Rekombination**: 1-Punkt-Crossover, Uniform Crossover, Intermediär?
- **Selektion**: Turnierselektion (q=?), ($\mu + \lambda$)-Selektion, … ?
- **Populationsgröße**
- **Kodierung**
- …

Welche EA-**Parametrisierung** ist besser für mein Problem?

Ergebnis eines EA-Laufs ist zufällig …

… und Vergleich zufälliger Größen ist mathematisch sinnlos!

$\Rightarrow$ also mehrere Läufe und Anwendung statistischer Verfahren!

Nur mühselig vorankommend:

Vernünftiger / sinnvoller Einsatz statistischer Methoden beim Testen

Typisches Beispiel

Ausgangslage:

- Optimierung unter einfacher Zielsetzung (→ min!)
- 2 randomisierte Suchverfahren: A und B
- Welches ist besser?
- Qualitätsmaß: skalarer Zielfunktionswert
- Wie testen?

Typische Vorgehensweise:

A(t) sei ZF-Wert von A nach t Iterationen, B(t) analog

Entscheidungsregel:

„A besser als B“ $\Leftrightarrow$ E[A(t)] < E[B(t)]

Also: fixiere max. Laufzeit t und Versuchszahl N

Wenn $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_i(t) \overset{?}{<} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} B_i(t) \quad ,$$

dann A besser als B.

Getestetes Szenario:

```
repeat
    Algorithmus 1x laufen lassen
    verwende beste gefundene Lösung A(t)
until Prozessunterbrechung
```

Realistisches Szenario:

```
repeat
    Algorithmus M mal laufen lassen
    verwende beste gefundene Lösung A*(t) der M Läufe
until Prozessunterbrechung
```

Passender Test:

$A^*(t) = \min \{ A_1(t), A_2(t)\ldots, A_M(t) \}$, $B^*(t)$ analog

Entscheidungsregel:

„A besser als B“ $\Leftrightarrow$ $E[A^*(t)] < E[B^*(t)]$

Also: fixiere max. Laufzeit t, Wiederholungen M und Versuchszahl N

Wenn $$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A_i^*(t) \overset{?}{<} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} B_i^*(t) \quad ,$$

dann A besser als B.

⇒ **kann zu gegensätzlichen Empfehlungen führen!**

Beispiel: (Gleichverteilung)

$X \sim U(a, b)$	$E[X] = \frac{a+b}{2}$	$E[X^*] = a + \frac{b-a}{M+1}$
$A \sim U(10, 14)$ $B \sim U(8, 18)$	$E[A] = 12$ $E[B] = 13$	$E[A^*] = 10 + \frac{4}{M+1}$ $E[B^*] = 8 + \frac{10}{M+1}$

$\Rightarrow$ $E[A] < E[B]$ aber $E[A^*] > E[B^*]$ sobald $M \geq 3$

Parametrischer Test:

doppelter t-Test (Vergleich von Mittelwerten)

Voraussetzungen für Anwendung:

1. Grundgesamtheiten normalverteilt
2. Gleiche Varianz

normalverteilt? → bestenfalls approximativ

gleiche Varianz? → erst Testen durch F-Test!

Falls F-Test zur Ablehnung der Gleichheitshypothese führt,

dann können wir den t-Test nicht anwenden!

Falls wir es trotzdem tun, dann sind die Aussagen statistisch wertlos!

Was dann?

Aus Theorie der Extremwertverteilungen:

Für $V_i \geq L > -\infty$ mit $V_{1:k} = \min \{ V_1, V_2, \ldots V_k \}$:

$F_{V_{1:k}}(x) \rightarrow F_W(x)$ für große k (Konvergenz in Verteilung)

d.h. $V_{1:k}$ ist für große k approximativ Weibull-verteilt

also:

A* und B* approximativ Weibull-verteilt, aber mit verschiedenen Parametern

nicht-parametrischer Test:

Hypothese $F_{A^*}(x) = F_{B^*}(x)$ vs. Hypothese $F_{A^*}(x) = F_{B^*}(x - \theta)$

robuster

Lageparameter

Mann/Whitney- bzw. Wilcoxon- bzw. U-Test:

nichtparametrischer Test für 2 unabhängige Stichproben

Hypothesen $H_0 : F_X = F_Y$ vs. $H_1 : F_X(x) = F_Y(x - \theta)$

bzgl. Lagealternative $\theta < 0$

Durchführung: $(n \geq 10)$

1. $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ sortieren
2. $u = \sum_i \text{Rang}(x_i) - n(n+1)/2$
3. $t = (u - n^2/2) \,/\, (n^2 (2n - 1) / 12)^{1/2}$
4. $t \in K_\alpha$? $\Rightarrow H_0$ ablehnen!

K_α ist $(1\text{-}2\alpha)$-Quantil der N(0,1)-Vert.

Testen und Statistik IX

Alternativen:

- **van-der-Werden** bzw. **X-Test**:

  mehr Rechenaufwand als U-Test,
  aber höhere asymptotische Wirksamkeit

- **Siegel-Tukey-Test**: (Variabilitätsalternative)

  $H_0 : F_X = F_Y$ vs. $H_1 : F_X(x) = F_Y(\theta x)$ für $0 < \theta \neq 1$

- **Mood-Test**: (Variabilitätsalternative)

  asymptotisch wirksamer als Siegel-Tukey-Test

- $>$ 2 unabh. Stichproben ! **Kruskal-Wallis-Test** (verallg. U-Test)

Ausgangslage

Kein Vorwissen (*a priori* Wissen) über Problem

Initiale Version 1

1. Wahl einer Repräsentation / Kodierung
2. Konstruktion einer Mutationsverteilung
3. (1+1)-EA anwenden!

ad 1.) Wähle die „natürlichste“ Repräsentation (nicht alles auf Bitstrings abbilden)

ad 2.) Verwende Verteilung maximaler Entropie
$\rightarrow$ Verteilung mit geringstem eingebauten Vorwissen

ad 3.) Kann schon gut funktionieren; Rechner rechnen lassen

Während Rechner rechnet $\Rightarrow$ Nachdenken! Könnte Rekombination oder andere Kodierung besser sein?

Design von EAs I

Version 2

Versuche mal $(1+\lambda)$-EA und $(1, \lambda)$-EA

noch immer keine Rekombination nötig!

Version 3

Versuche mal $(\mu+\lambda)$-EA und (μ, λ)-EA
sowie andere Selektionsformen

noch immer keine Rekombination nötig!

Version 4

Rekombination einbauen

welche? stark abhängig von Repräsentation!

→ vergleichen mit statistischen Tests!

Verteilungen maximaler Entropie

Sei $(p_k)_{k \in I}$ die W‘keitsfunktion einer diskreten Verteilung.

Dann ist $H(p) = -\sum_{k \in I} p_k \log(p_k)$ die **Entropie** der Verteilung.

Die Verteilung, für die H(p) unter gleichen Nebenbedingungen maximal wird, heißt **Verteilung maximaler Entropie**. ■

Interpretation von Verteilungen **maximaler Entropie**:

- Verteilung maximaler Unvoreingenommenheit
- Verteilung mit geringstem einbauten „Vorwissen“
- Verteilung geringster Information

Design von EAs II

Beispiele:

Träger $\{ 1, 2, \ldots, n \}$ $\Rightarrow$ diskrete Gleichverteilung

zusätzl. $E[X] = \theta$ $\Rightarrow$ Boltzmann-Verteilung

zusätzl. $V[X] = \eta^2$ $\Rightarrow$ N.N. (berechenbar; **nicht** Binomial-Verteilung)

Träger $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ nicht def.

zusätzl. $E[X] = \theta$ $\Rightarrow$ geometrische Verteilung

zusätzl. $V[X] = \eta^2$ $\Rightarrow$?

Träger $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ nicht def.

mit $E[|X|] = \theta$ $\Rightarrow$ bi-geometrische Verteilung

mit $E[|X|^2] = \eta^2$ $\Rightarrow$ N.N. (berechenbar)

Design von EAs III

Träger $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Gleichverteilung

Träger $\mathbb{R}^+$ mit $E[X] = \theta$ $\Rightarrow$ Exponentialverteilung

Träger $\mathbb{R}$
mit $E[X] = \theta$, $V[X] = \eta^2$ $\Rightarrow$ Normalverteilung $N(\theta, \eta^2)$

für Permutationsverteilungen ?

Erst wenn man etwas über das Problem weiß oder gelernt hat

$\Rightarrow$ einbauen in Verteilung

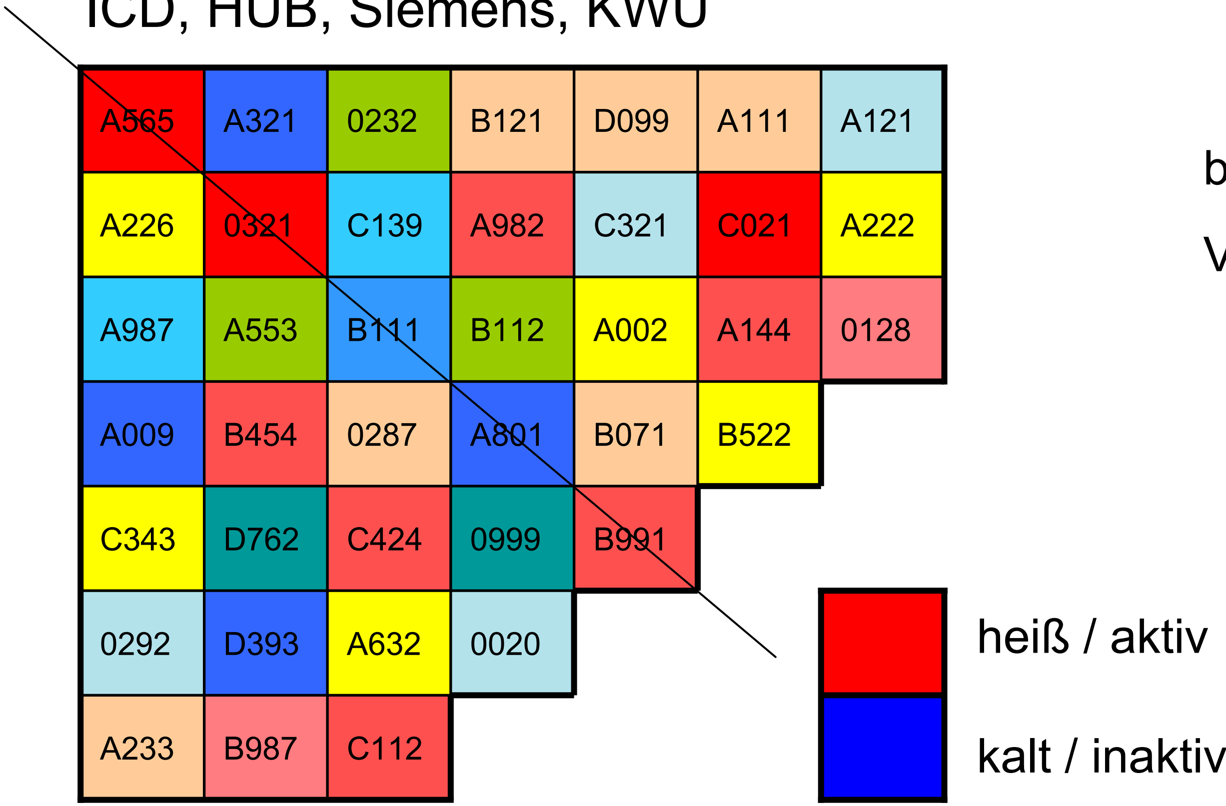
Integration von Problemwissen

- Wissensintegration im Bereich EC wird immer wichtiger
- **Garantie:**
  Je mehr Wissen über das zu optimierende Problem in irgendeiner Komponente eines EA kodiert werden kann, desto besser sind die erzielbaren Resultate!
- **Caveat:**
  Suchraum / Alternativenmenge wird reduziert:
  Kann zum Ausschluss guter Lösungen führen!
- Integration auf verschiedenen Ebenen:
  - Modellierung von Benutzerpräferenzen
  - Fitness-Funktionen
  - Mensch-Maschine-Interaktion
  - Genetische Operatoren:
    - Initialisierung
    - Rekombination
    - Mutation
    - Selektion

Frühes Beispiel: Brennstabwechselproblem (1994f.):
ICD, HUB, Siemens, KWU

bedingt durch Interface:

Viertelsymmetrie



Problemwissen: Abbrand homogener je symmetrischer die Stabaktivität

⇒ Variationsoperatoren verändern, um Achtelsymmetrie zu erzwingen!