

**Energiebasierte Optimierung
geradlinig planarer
Graphzeichnungen**

Hendrik Ewerlin

Algorithm Engineering Report

TR10-1-002

April 2010

ISSN 1864-4503

Diplomarbeit

**Energiebasierte Optimierung geradlinig
planarer Graphzeichnungen**

**Hendrik Ewerlin
14. Dezember 2009**

Betreuer:

Prof. Dr. Petra Mutzel

Dipl.-Inform. Carsten Gutwenger

Fakultät für Informatik

Algorithm Engineering (Ls11)

Technische Universität Dortmund

<http://ls11-www.cs.uni-dortmund.de>

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Bochum, den 14. Dezember 2009

Hendrik Ewerlin

Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Petra Mutzel für die hervorragende Betreuung und die hilfreichen Gespräche. Mit ihrer Vorlesung zum automatischen Zeichnen von Graphen hat sie mein Interesse an diesem spannenden Forschungsgebiet erst geweckt. Außerdem bedanke ich mich für die Freiheit, die mir in der Themenwahl gewährt wurde.

Ich danke Dipl.-Inform. Carsten Gutwenger für sein kompetentes Engagement bei der Betreuung und die Anregungen aus zahlreichen Diskussionen. Für die wertvollen Antworten auf alle anfallenden Fragen bin ich ihm sehr dankbar.

Ich danke Petra, Ulrich, Christoph und Melanie Ewerlin, Stefanie Storck und Stephan Dilly für aufbauende Worte, interessante Anregungen und die vielen kleinen Dinge, die mich beim Schreiben meiner Diplomarbeit unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Hintergrund	1
1.2	Aufbau der Arbeit	2
2	Grundlagen	5
2.1	Automatisches Zeichnen von Graphen	5
2.1.1	Graphen, Graphzeichnungen und Planarität	5
2.1.2	Anforderungen an Graphzeichenverfahren	7
2.2	Verfahren zum Zeichnen von Graphen	8
2.2.1	Geradlinig planare Verfahren	10
2.2.2	Energiebasierte Verfahren	11
2.2.3	Kräftebasierte Verfahren	14
2.3	Formmaße für Polygone	16
2.3.1	Konvexität	16
2.3.2	Rundheit	17
3	Der Planare Energie-Optimierer (PEO)	19
3.1	Rahmen und Entwurfsentscheidungen	19
3.2	Module zur Variation	21
3.2.1	Verschiebung einzelner Knoten	22
3.2.2	Blocktransformation	25
3.3	Konstrukte zur Aggregation gleichartiger Daten	26
3.3.1	Lagemasse	27
3.3.2	Ähnlichkeitsmaße	28
3.4	Komponenten einer Energiefunktion	32
3.4.1	Anforderungen	32
3.4.2	Gültigkeit	33
3.4.3	Wohlgeformte Kreise	34
3.4.4	Ähnliche Kantenlängen	37
3.4.5	Separation	38

3.4.6	Ähnliche Winkel	39
3.4.7	Idealer Knotenabstand	40
3.5	Erweiterungen für Kreuzungen und Knicke	41
3.5.1	Kreuzungen	41
3.5.2	Knicke	44
4	Realisierung	47
4.1	Verwendete Softwarebibliotheken	47
4.2	Effiziente Aktualisierung von Energiewerten	48
4.3	Implementierung des Verfahrens von Bertault	52
5	Experimentelle Evaluation	53
5.1	Einzelne Komponenten	53
5.1.1	Wohlgeformte Kreise	54
5.1.2	Ähnliche Kantenlängen	59
5.1.3	Separation	64
5.1.4	Ähnliche Winkel	70
5.1.5	Idealer Knotenabstand	72
5.2	Komplexe Konfigurationen im Vergleich mit Bertault	74
5.2.1	Komplexe Konfigurationen	75
5.2.2	Bäume	77
5.2.3	Triangulierte Graphen	82
5.2.4	Zweizusammenhängende Graphen	87
5.2.5	Nicht zweizusammenhängende Graphen	92
5.3	Kreuzungen und Knicke	95
5.3.1	Grundsätzliche Wirkungsweisen	95
5.3.2	Adaption verschiedener Verfahren	98
5.3.3	Knickentfernung	102
6	Zusammenfassung und Ausblick	105
	Abbildungsverzeichnis	109
	Literaturverzeichnis	113

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Hintergrund

Graphen durchziehen die Informatik als ein grundlegendes Werkzeug: Endliche Automaten, Petrinetze, Klassendiagramme, Objektdiagramme, Ablaufdiagramme und Datenbankmodelle sind nur einige Beispiele für die Verwendung von Graphen. Auch in Praxisanwendungen können die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Objekten durch Graphen modelliert werden.

Wenn es darum geht, dass ein menschlicher Betrachter die Struktur eines Graphen erfassen soll, sind Zeichnungen textuellen Ausgabeformen meist überlegen. Automatische Zeichenverfahren werden besonders für Graphen benötigt, die in computergestützten Prozessen erzeugt werden.

Zur Generierung von Graphzeichnungen haben sich unterschiedliche algorithmische Herangehensweisen etabliert.

Geradlinig planare Verfahren generieren Zeichnungen ohne Kantenkreuzungen und Kantenknicke für Graphen, bei denen dies prinzipiell möglich ist. Jedoch entstehen lange Kanten, starke Unterschiede in den Kantenlängen und sehr kleine Winkel. Abbildung 1.1(a) zeigt die Zeichnung eines Graphen durch ein geradlinig planares Verfahren.

Energiebasierte Verfahren fassen das Zeichnen von Graphen als Optimierungsproblem auf. Die „Hässlichkeit“ einer Zeichnungen wird durch eine Energiefunktion formalisiert und dann minimiert. Diese Verfahren generieren Zeichnungen mit ähnlichen Kantenlängen und einer gleichmäßigen Verteilung der Knoten auf der Zeichenfläche. Die Vermeidung von Kantenkreuzungen ist jedoch oft nicht vorgesehen. Gleiches gilt für kräftebasierte Verfahren. Abbildung 1.1(b) zeigt die Zeichnung eines Graphen durch ein kräftebasiertes Verfahren.

Der Planare Energie-Optimierer (PEO), der in dieser Arbeit entwickelt wird, vereint die Vorteile beider Ansätze. Ein Graph wird zunächst geradlinig planar gezeichnet. Dann erfolgt eine energiebasierte Optimierung. Spezielle Variationsoperatoren erzeugen kreuzungsfreie Nachfolgezeichnungen mit unveränderter planarer Einbettung. Diese werden

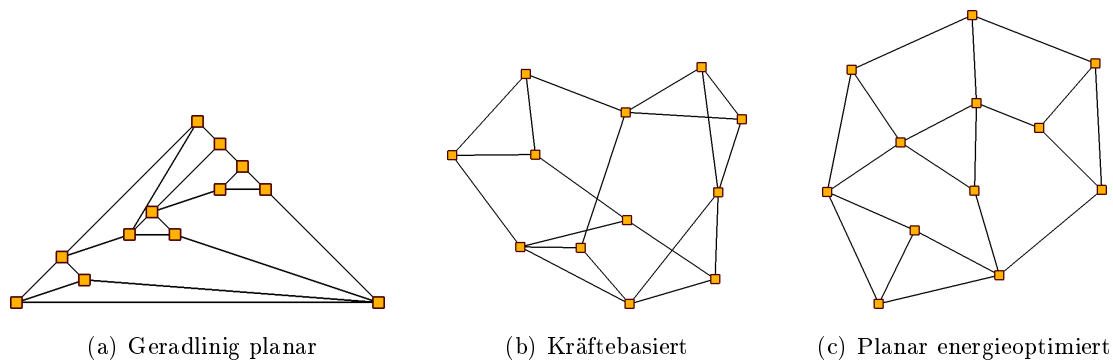


Abbildung 1.1: Der Planare Energie-Optimierer vereint die Vorteile zweier Ansätze: Geradlinig planare Zeichenverfahren (a) zeichnen planare Graphen ohne Kreuzungen und Knicke, aber mit kleinen Winkeln und großen Unterschieden in den Kantenlängen. Kräftebasierte Zeichenverfahren (b) – ebenso wie energiebasierte Verfahren – erreichen ähnliche Kantenlängen, aber die Vermeidung von Kreuzungen ist oft nicht vorgesehen. Der Planare Energie-Optimierer (c) optimiert planare Zeichnungen mit energiebasierten Methoden.

durch eine Energiefunktion bewertet, deren Wert maximiert werden soll. Die Zeichnung mit dem höchsten Energiewert wird für die weitere Optimierung übernommen. So entstehen Zeichnungen mit einer Tendenz zu ähnlichen Kantenlängen, rundlichen Gebieten und gut separierten Knoten. Die Zeichnungen weisen keine Kantenkreuzungen auf.

Abbildung 1.1(c) zeigt die Optimierung der Zeichnung in Abbildung 1.1(a) durch den Planaren Energie-Optimierer. Es zeigt sich, dass die ästhetischen Vorteile der Zeichnungen 1.1(a) und 1.1(b) simultan erfüllt werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Kapitel 2 beschreibt die für diese Arbeit benötigten Grundlagen. Es werden Begriffe zu Graphen, Graphzeichnungen und Planarität eingeführt und Ästhetikkriterien definiert. Verschiedene Ansätze zum Zeichnen von Graphen werden diskutiert. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf energiebasierten Verfahren. Zudem werden geometrische Grundlagen angeführt.

Kapitel 3 beschreibt den Planaren Energie-Optimierer (PEO). Der Rahmenalgorithmus wird vorgestellt und grundlegende Designentscheidungen begründet. Es folgen Module zur Variation der Zeichnung. Zur Vorbereitung der Definition von Komponenten einer Energiefunktion werden Lagemaße und Ähnlichkeitsmaße definiert. Anschließend werden Energiekomponenten entwickelt, die verschiedene Ästhetikkriterien formalisieren. Schließlich wird das Verfahren erweitert, sodass auch Zeichnungen mit Kreuzungen und Knicken adaptiert werden können.

Kapitel 4 beschreibt die Realisierung des Planaren Energie-Optimierers. Verwendete Softwarebibliotheken werden genannt. Ein besonderer Schwerpunkt liegt auf der effizienten Aktualisierung der Energiefunktion mit Hilfe eines Energiebaumes.

Kapitel 5 evaluiert das entwickelte Verfahren. Es werden grundsätzliche Eigenschaften der Energiekomponenten beleuchtet. Komplexe Konfigurationen werden auf verschiedenen Graphklassen evaluiert und mit dem Verfahren von Bertault [6] verglichen. Zudem werden die Erweiterungen des Verfahrens um Kreuzungen und Knicke evaluiert.

Kapitel 6 fasst die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen.

Kapitel 2

Grundlagen

Dieses Kapitel klärt die Grundlagen, auf denen diese Arbeit aufbaut. Abschnitt 2.1 führt in wesentliche Begriffe im Zusammenhang mit Graphen, ihren Zeichnungen und Planarität ein. Zudem werden Anforderungen an Graphzeichnungen durch Ästhetikkriterien fixiert. Abschnitt 2.2 thematisiert verschiedene Ansätze zum automatischen Zeichnen von Graphen. Dabei liegt ein besonderer Fokus auf energiebasierten Verfahren, da das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren diesem Ansatz folgt. Abschnitt 2.3 behandelt schließlich einige geometrische Grundlagen und Formmaße für Polygone. Die Ausführungen zu Graphen und Graphzeichenverfahren sind in wesentlichen Teilen durch Jünger und Mutzel [18] geleitet.

2.1 Automatisches Zeichnen von Graphen

2.1.1 Graphen, Graphzeichnungen und Planarität

Graphen (ungerichtet, einfach, ohne Schleifen), Nachbarn, Zusammenhang. Ein *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen *Knotenmenge* V (englisch vertices) und einer *Kantenmenge* $E \subseteq V \times V$ (englisch edges). Die Kantenmenge definiert, welche Paare von Knoten miteinander verbunden sind. In dieser Arbeit sind Graphen immer *ungerichtet, einfach, ohne Schleifen* und *zusammenhängend*. Ein Graph ist *ungerichtet*, wenn die Kanten keine Richtung aufweisen. Es gilt $(u, v) \in E$ genau dann, wenn $(v, u) \in E$ ist. Der Graph ist *einfach*, wenn nicht mehrere Kanten zwischen einem Knotenpaar verlaufen. Der Graph besitzt *keine Schleifen*, wenn für jeden Knoten $v \in V$ gilt, dass $(v, v) \notin E$ ist. Die *Nachbarn* $V(v)$ eines Knotens $v \in V$ sind alle Knoten w mit $(v, w) \in E$. Der *Grad* eines Knotens ist die Anzahl seiner Nachbarn. Ein *Pfad* zwischen zwei Knoten u und v ist eine Sequenz von Knoten $[u_1, \dots, u_k]$ mit $u_1 = u, u_k = v$, sodass für jedes $i \in \{2, \dots, k\}$ gilt, dass $(u_{i-1}, u_i) \in E$ ist. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn zwischen allen Knotenpaaren ein Pfad existiert.

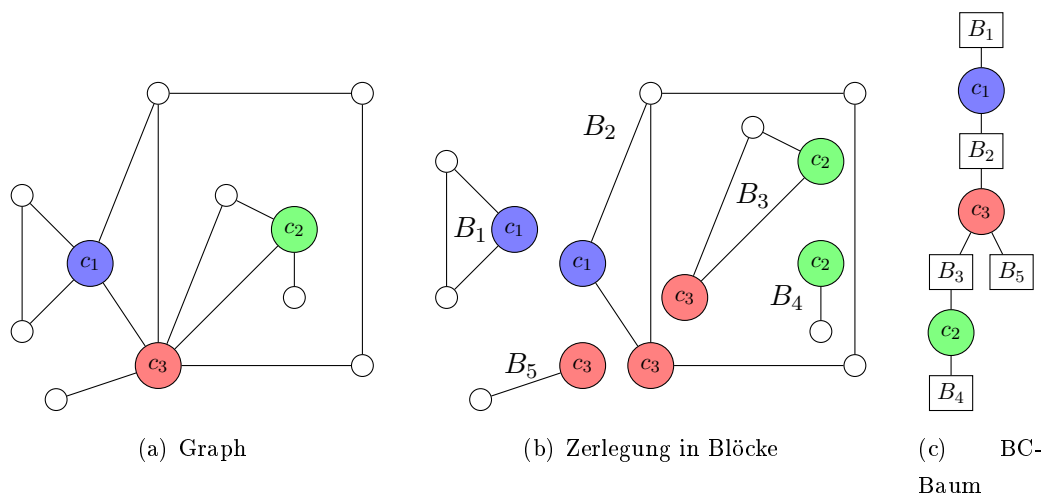


Abbildung 2.1: Ein Graph mit fünf Blöcken und drei farblich markierten Schnittknoten (a), die Zerlegung des Graphen in Blöcke (b) und der zugehörige BC-Baum (c).

Zweizusammenhang, Schnittknoten, Blöcke, BC-Baum. Ein Knoten $v \in V$ heißt *Schnittknoten*, wenn der Graph nach Entfernung von v nicht mehr zusammenhängend ist. Ein zusammenhängender Graph ohne Schnittknoten heißt *zweizusammenhängend*. Der zu einer Knotenmenge $U \subseteq V$ *induzierte Teilgraph* ist der Graph $(U, E \cap (U \times U))$. Ein maximaler zweizusammenhängender Teilgraph von G heißt *Block*. Maximal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass $U = V$ gilt oder bei Hinzufügen jedes weiteren Knotens zu U der Zweizusammenhang verloren ginge. Eine Kante, die einzige Kante eines Blocks ist, heißt *Brücke*. Sei C die Menge aller Schnittknoten (englisch cut vertex) und B die Menge aller Blöcke, dann ist $(B \cup C, \{(b, c) \mid b \in B, c \in C, c \in V(b)\})$ der *BC-Baum* zu G . Abbildung 2.1 zeigt einen Graphen mit fünf Blöcken und drei farblich markierten Schnittknoten (a), die Zerlegung des Graphen in Blöcke (b) und den zugehörigen BC-Baum (c). Die Linearzeitberechnung von BC-Bäumen ist in Anlehnung an einen Algorithmus von Hopcroft und Tarjan [17] möglich.

Zeichnung. Eine *Zeichnung* bildet die Knoten und Kanten des Graphen auf geometrische Objekte ab, sodass der Graph visualisiert wird. In dieser Arbeit werden Knoten auf Punkte im zweidimensionalen Raum abgebildet. Für einen Knoten $v \in V$ sind $x_v, y_v \in \mathbb{R}$ die *Koordinaten des Knotens*. Außerdem bezeichnet $d(u, v) = \sqrt{(x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2}$ die *euklidische Distanz* zwischen Knoten. Bei *geradlinigen Zeichnungen* werden Kanten auf die Geradensegmente zwischen den Punkten der beteiligten Knoten abgebildet. Bei *Polygonlinienzeichnungen* werden Start- und Endpunkt der Kante in der Mitte durch eine Sequenz endlich vieler Knickstellen ergänzt. Aufeinanderfolgende Punkte werden durch Geradensegmente verbunden.

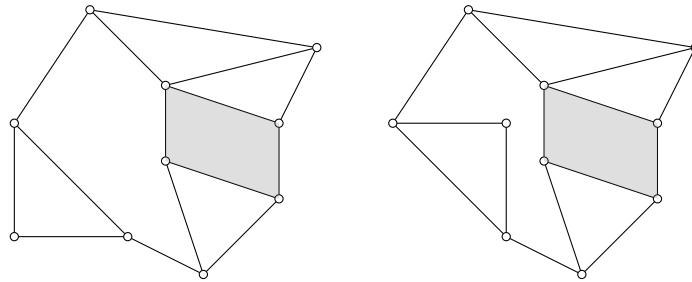


Abbildung 2.2: Zwei Einbettungen eines Graphen mit sieben Gebieten (Außengebiet inklusive). Ein Gebiet ist grau ausgefüllt.

Planarität, kombinatorische und planare Einbettung, Gebiete, Außengebiet, Gebietszyklus. Eine Zeichnung heißt *planar*, wenn sich Kantensegmente nur an gemeinsamen Endpunkten überschneiden. Ein Graph heißt *planar*, wenn er planar gezeichnet werden kann. Planare Zeichnungen zerteilen die Ebene in *Gebiete*. Die Menge der Gebiete wird mit F (englisch faces) bezeichnet. Der *Gebietszyklus* eines Gebietes $f \in F$ ist die zyklische Aufzählung der Kanten, die f begrenzen. Die *kombinatorische Einbettung* einer planaren Zeichnung ist durch die zyklische Reihenfolge der Kanten um alle Knoten gegeben und bestimmt eineindeutig die Gebietszyklen. Die *planare Einbettung* entspricht der kombinatorischen Einbettung mit Wahl eines Außengebietes. Abbildung 2.2 zeigt einen Graphen mit zwei verschiedenen Einbettungen. Zur Illustration ist ein Gebiet grau ausgefüllt.

2.1.2 Anforderungen an Graphzeichnenverfahren

Ziel eines automatischen Verfahrens zum Zeichnen von Graphen ist es, zu einem gegebenen Graphen eine möglichst „gute“ Zeichnung zu generieren. Es ist nicht unmittelbar klar, woran sich ein solcher Ästhetikbegriff festmachen lässt. Eine Zeichnung sollte gut lesbar sein, in dem Sinne, dass sie die Struktur des Graphen durch die Möglichkeiten der Visualisierung in verständlicher Weise veranschaulicht. Darüber hinaus lassen sich Ästhetikkriterien angeben, deren Erfüllung eine ästhetische Zeichnung begünstigt. Viele dieser Kriterien sind negativ durch das Fehlen unübersichtlicher Stellen in der Zeichnung definiert. Bei verschiedenen Verfahren wird den Kriterien eine unterschiedliche Bedeutung zugesprochen. In dieser Arbeit sind Ästhetikkriterien besonders relevant, da sie systematisch in Komponenten einer Energiefunktion umgesetzt werden. Einige Ästhetikkriterien sind:

- **Wenig Kantenkreuzungen:** Da Kantenkreuzungen das Verfolgen der beteiligten Kanten erschweren, sind sie möglichst zu vermeiden. Im Idealfall sollte eine Zeichnung planar sein.

- **Wenig Kantenknicke:** Auch Knicke erschweren das Verfolgen einer Kante, insbesondere dann, wenn die Knickwinkel groß sind.
- **Ähnliche Kantenlängen:** Kanten sollten möglichst gleich lang sein.
- **Geringe Kantenlängen:** Kurze Kanten sind leichter zu verfolgen.
- **Gute Separation:** Paare von Knoten sollten einen gewissen Mindestabstand einhalten und nicht verbundene Knotenpaare größeren Abstand haben als verbundene Knotenpaare. Auch Distanzen zwischen Knoten und Kanten sollten nicht zu gering ausfallen.
- **Hohe Winkelauflösung:** Kleine Winkel sind zu vermeiden.
- **Ausnutzung der Zeichenfläche:** Die Zeichnung sollte kompakt sein, in dem Sinne, dass sie eine minimale Fläche optimal ausfüllt ohne Platz zu verschwenden.
- **Wohlgeformte Gebiete:** Die Gebiete der Zeichnung sollten wohlgeformt, rund und konvex sein.
- **Symmetrien:** Manche Graphen weisen Symmetrien auf. Das Zeichenverfahren sollte diese unterstützen und symmetrische Teilgraphen gleich zeichnen.
- **Hierarchie:** Bei gerichteten Graphen kann eine Zeichnung die Richtung der Kanten verdeutlichen, indem beispielsweise alle Kanten von oben nach unten gezeichnet werden.

2.2 Verfahren zum Zeichnen von Graphen

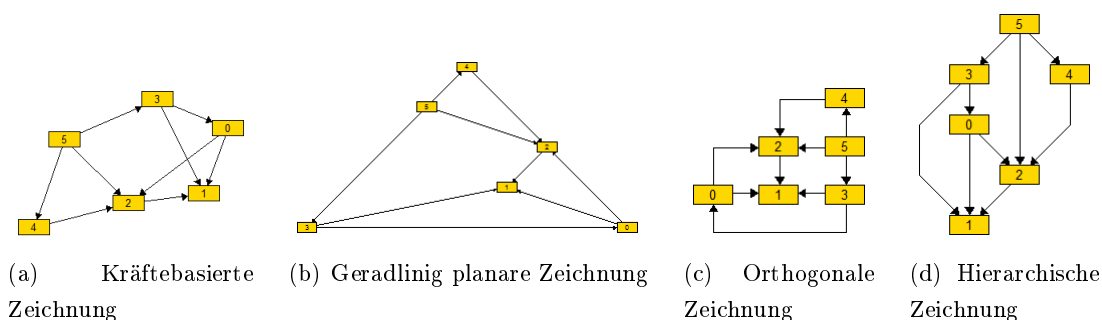


Abbildung 2.3: Verschiedene Ansätze zum Zeichnen von Graphen.

Dieser Abschnitt thematisiert verschiedene Verfahren zum automatischen Zeichnen von Graphen. Die Vagheit der Anforderungen an eine gute Zeichnung hat zur Etablierung sehr

vielfältiger algorithmischer Herangehensweisen geführt, die nachfolgend aufgeführt werden. Abbildung 2.3 verdeutlicht verschiedene Herangehensweisen am Beispiel eines kleinen Graphen.

- **Energiebasierte Verfahren:** Energiebasierte Verfahren bestehen aus zwei Komponenten: Eine Energiefunktion ordnet jeder Zeichnung einen Zahlenwert zu, der die „Hässlichkeit“ der Zeichnung beschreibt. Eine Optimierungsmethode ermittelt zu einem gegebenen Graphen eine Zeichnung mit möglichst geringem Energiewert. Energiebasierte Verfahren werden in Abschnitt 2.2.2 vertieft.
- **Kräftebasierte Verfahren** (Abbildung 2.3(a)): Kräftebasierte Verfahren zeichnen Graphen, indem wiederholt alle Knoten verschoben werden. Richtung und Auslenkung der Verschiebung sind in einer sogenannten Kraft zusammengefasst. Diese setzt sich aus abstoßenden Kräften zwischen Knotenpaaren und anziehenden Kräften zwischen benachbarten Knotenpaaren zusammen. Kräftebasierte Verfahren erzielen besonders im Bezug auf uniforme Kantenlängen gute Ergebnisse. Abstände zwischen Knotenpaaren fallen nicht zu gering aus. Außerdem führt die symmetrische Berechnung der Kräfte zur Unterstützung von Symmetrien in der Zeichnung. Die Beispielzeichnung zeigt, dass es schon in einfachen Zeichnungen zu Kreuzungen kommen kann, da diese nicht explizit verhindert werden. Kräftebasierte Verfahren werden in Abschnitt 2.2.3 vertieft.
- **Geradlinig planare Verfahren** (Abbildung 2.3(b)): Geradlinig planare Verfahren zeichnen planare Graphen ohne Kreuzungen und Knicke. Dabei haben sich Gitterzeichnenverfahren etabliert, bei denen die Knoten auf ganzzahligen Koordinaten platziert werden. Geradlinig planare Verfahren werden in Abschnitt 2.2.1 vertieft.
- **Orthogonale Verfahren** (Abbildung 2.3(c)): Orthogonale Verfahren generieren Zeichnungen, bei denen die Kanten nur horizontal oder vertikal verlaufen. Dabei werden möglichst wenige Knicke und Kreuzungen generiert. Besonders beim Zeichnen von Diagrammen haben sich orthogonale Zeichnungen bewährt. Ein bekanntes Verfahren von Batini, Nardelli und Tamassia [5] verfolgt den sogenannten topology-shape-metrics-Ansatz: In einer ersten Phase wird die Topologie der Zeichnung festgelegt. Dazu wird eine Einbettung fixiert und Kreuzungen durch künstliche Kreuzungsknoten ersetzt. In der zweiten Phase folgt die Festlegung der Kantenrichtungen und Knicke. In der dritten Phase werden die konkreten Positionen festgesetzt.
- **Hierarchische Verfahren** (Abbildung 2.3(d)): Hierarchische Zeichnungen stellen die Richtung der Kanten in den Vordergrund. Die Knoten werden so gezeichnet, dass die gerichteten Kanten von oben nach unten verlaufen. Hier ist ein Verfahren von Sugiyama, Tagawa und Toda [25] weit verbreitet. Dieses Verfahren generiert hierarchische Zeichnungen in drei Phasen: In der ersten Phase werden die Knoten auf

Schichten angeordnet, sodass Kanten nur in Richtung niedrigerer Schichten verlaufen. Kanten, die über mehrere Schichten hinweg verlaufen, werden auf jeder Zwischenschicht durch einen Knickknoten repräsentiert. In der zweiten Phase erfolgt die horizontale Umordnung der Knoten auf den Schichten, um die Anzahl der Kreuzungen zu reduzieren. In der dritten Phase werden die konkreten Knotenkoordinaten zugewiesen.

Im Kontext dieser Arbeit sind besonders geradlinig planare Zeichenverfahren und energiebasierte Verfahren relevant, da die Arbeit beide Ansätze integriert. Deshalb werden beide Ansätze in den folgenden Abschnitten vertieft. Zuletzt wird der kräftebasierte Ansatz beleuchtet, da das kräftebasierte Verfahren von Bertault [6] in dieser Arbeit zum Vergleich herangezogen wird.

2.2.1 Geradlinig planare Verfahren

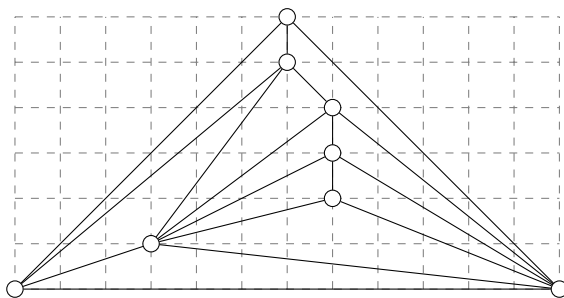


Abbildung 2.4: Zeichnung des Verfahrens von de Fraysseix, Pach und Pollack [10].

Die Meilensteine zu geradlinig planaren Verfahren sind kompakt von Chrobak und Kant [7] zusammengefasst worden. Dieser Abschnitt folgt ihren Ausführungen.

Schon früh wurde unabhängig von Fáry [12], Stein [24] und Wagner [28] gezeigt, dass jeder planare Graph auch geradlinig planar gezeichnet werden kann. Es gibt also keinen Graphen, der mit gebogenen Kanten kreuzungsfrei gezeichnet werden kann, aber nicht mit geradlinigen Kanten. Jedoch führten erste Verfahren zu exponentiellem Platzverbrauch.

De Fraysseix, Pach und Pollack [10] gaben als erste ein Verfahren an, das zu einem Graphen mit n Knoten in Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ eine geradlinig planare Zeichnung erzeugt, bei der nur Knotenkoordinaten auf einem ganzzahligen Gitter der Größe $(2n - 4) \times (n - 2)$ benötigt werden. Dazu wird zunächst eine spezielle Reihenfolge der Knoten berechnet. Diese erlaubt es, die Knoten mit aufsteigenden y -Koordinaten hinzuzufügen. Dabei werden bereits platzierte Knoten minimal verschoben, sodass die geradlinige Kreuzungsfreiheit erhalten bleibt. Abbildung 2.4 zeigt eine Zeichnung dieses Verfahrens. Chrobak und Payne [8] lieferten eine Linearzeitimplementierung.

Kurz nach der Publikation von de Fraysseix et al. [10] gelang es Schnyder [23] mit einem grundverschiedenen Ansatz in Linearzeit geradlinig planare $(n - 2) \times (n - 2)$ -Gitterzeichnungen zu erzeugen.

Chrobak und Kant [7] entwarfen schließlich ein Linearzeitverfahren mit Platzverbrauch $(n - 2) \times (n - 2)$, das dreizusammenhängende Graphen mit konvexen Gebieten zeichnet.

Die Zeichnungen erhalten durch den Verzicht auf Kreuzungen und Knicke eine gewisse puristische Schönheit. Jedoch wird eine Vielzahl wichtiger Ästhetikkriterien nicht unterstützt: Die Zeichnungen enthalten in der Regel lange Kanten, sehr unterschiedliche Kantenlängen und sehr kleine Winkel. Ein gewisser Mindestabstand zwischen Knoten ist durch das Gitter gegeben, doch die langen Kanten lassen einige Knotenpaare schlecht separiert erscheinen.

2.2.2 Energiebasierte Verfahren

Bei energiebasierten Verfahren wird das Graphzeichnenproblem als Optimierung aufgefasst. Im Zentrum steht eine Energiefunktion E , die jeder möglichen Zeichnung einen Zahlenwert zuordnet, der die „Hässlichkeit“ der Zeichnung angibt. Diese Energiefunktion wird minimiert. Je nach Komplexität von E ergeben sich verschiedene Möglichkeiten; das Spektrum reicht von exakter Optimierung bis hin zur Anwendung allgemeiner Suchheuristiken.

Bei der Verwendung einer allgemeinen Optimierungsmethode erhält der energiebasierte Ansatz den Charme des Deklarativen: Man erhält das Gefühl, das Optimierungsziel durch die Energiefunktion angeben zu können, wobei die Suchheuristik die Optimierung bewerkstelligt. Nachteilig ist, dass zumeist keine Gütegarantie gegeben werden kann. Besonders bei komplexen Energiefunktion werden globale Optima oft nicht erreicht. Dennoch werden viele Ästhetikkriterien gut erfüllt. Dazu gehören insbesondere uniforme Kantenlängen und die Darstellung von Symmetrien. Eine Integration der Kreuzungsfreiheit führt jedoch zu hohen Laufzeiten.

Im Folgenden werden drei energiebasierte Verfahren vorgestellt.

2.2.2.1 Das Verfahren von Tutte

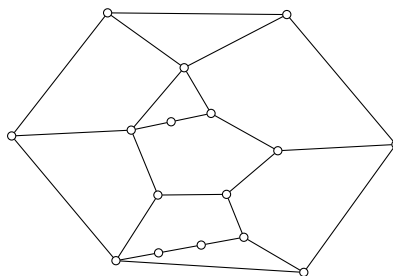


Abbildung 2.5: Zeichnung des Verfahrens von Tutte [27]: Alle Knotenpositionen fallen mit dem Schwerpunkt der Nachbarpositionen zusammen.

Ein altes und noch immer weit verbreitetes Zeichenverfahren geht auf Tutte [27] zurück. Das Verfahren minimiert die Summe der quadratischen Abstände benachbarter Knoten. Die Energiefunktion lautet

$$\begin{aligned} E_{Tutte} &= \frac{1}{2} \sum_{(v_i, v_j) \in E} d(v_i, v_j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(v_i, v_j) \in E} ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Als notwendige Bedingung für ein Minimum müssen die partiellen Ableitungen null entsprechen. Die Koordinaten $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ einer energieminimalen Zeichnung erhält man als Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\frac{\partial E_{Tutte}}{\partial x_i} = \sum_{v_j \in V(v_i)} (x_i - x_j) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial E_{Tutte}}{\partial y_i} = \sum_{v_j \in V(v_i)} (y_i - y_j) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Da Minimalität auch dann gewährleistet ist, wenn alle Knoten in einem Punkt zusammenfallen, werden einige Knoten vorab fixiert. Wenn der Graph dreizusammenhängend ist und man die Knoten des Außengebietes einer beliebigen planaren Einbettung auf dem Rand eines strikt konvexen Polygons fixiert, erhält man eine geradlinig planare Zeichnung mit konvexen Gebieten.

Abbildung 2.5 zeigt eine Zeichnung des Verfahrens von Tutte. Alle Knotenpositionen fallen mit dem Schwerpunkt der Nachbarpositionen zusammen.

Die Energiefunktion selbst findet bei Tutte keine Erwähnung. Vielmehr passt sie zu dem von ihm aufgestellten linearen Gleichungssystem und hilft, das Verfahren in den energiebasierten Kontext einzuordnen.

2.2.2.2 Das Verfahren von Kamada und Kawai

Ein weiteres Verfahren wurde von Kamada und Kawai [19] entwickelt. Die Grundidee ist einfach: Der Abstand zwischen allen Knotenpaaren soll der Länge eines kürzesten Pfades zwischen den Knoten entsprechen. In Abbildung 2.6 wird deutlich, dass dieser Ansatz ästhetische Zeichnungen erzeugen kann. $D(u, v)$ bezeichne die Anzahl der Kanten eines Pfades zwischen u und v . Sei außerdem $g(u, v) = 1/D(u, v)$ das Gewicht des Knotenpaares (u, v) und L eine Wunschkantenlänge, dann ist die Energiefunktion gegeben durch

$$E_{KK} = \frac{1}{2} \sum_{u, v \in V, u \neq v} g(u, v) \cdot (d(u, v) - D(u, v) \cdot L)^2 \quad (2.4)$$

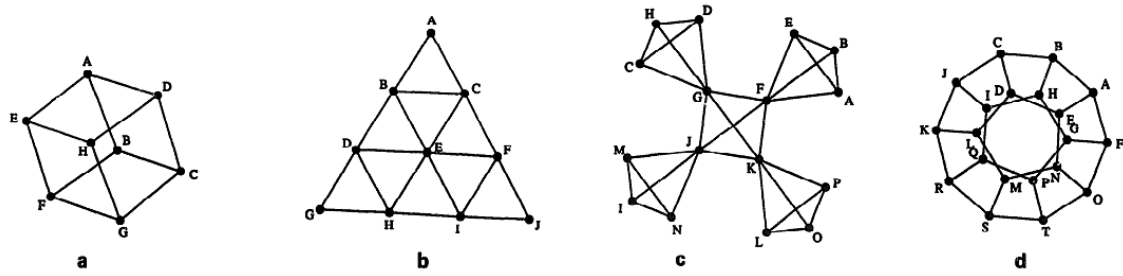


Abbildung 2.6: Zeichnungen des Verfahrens von Kamada und Kawai [19]: Es zeigt sich, dass die Annäherung der Distanzen an den Idealabstand der Knoten ästhetische Zeichnungen hervorbringt – Originalabbildung aus [19].

Für eine energieminimale Zeichnung gilt $\frac{\partial E_{KK}}{\partial x_i} = \frac{\partial E_{KK}}{\partial y_i} = 0$. Zur Annäherung an eine solche Zeichnung werden wiederholt einzelne Knoten verschoben. Dabei wird der nächste Knoten v_m ausgewählt, bezüglich dessen Koordinaten die Energiefunktion im Punkt der aktuellen Zeichnung die größte Steigung aufweist. Genauer ist

$$v_m = \operatorname{argmax}\{\Delta_i(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \mid v_i \in V\}$$

$$\text{mit } \Delta_i = \sqrt{\left(\frac{\partial E_{KK}}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_{KK}}{\partial y_i}\right)^2} \quad (2.5)$$

Schließlich wird v_m in Richtung des Gefälles der Energiefunktion bewegt, bis das lokale Minimum bezüglich der Koordinaten hinreichend angenähert ist. Dabei wird mit Hilfe der zweiten Ableitungen eine günstige Schrittweite für die Verschiebung ermittelt.

Die Energiefunktion ist also hinreichend einfach, sodass eine zielgerichtete Knotenverschiebung möglich ist. Auch die elegante Bedarfsauswahl wird durch die Einfachheit der Energiefunktion ermöglicht.

2.2.2.3 Das Verfahren von Davidson und Harel

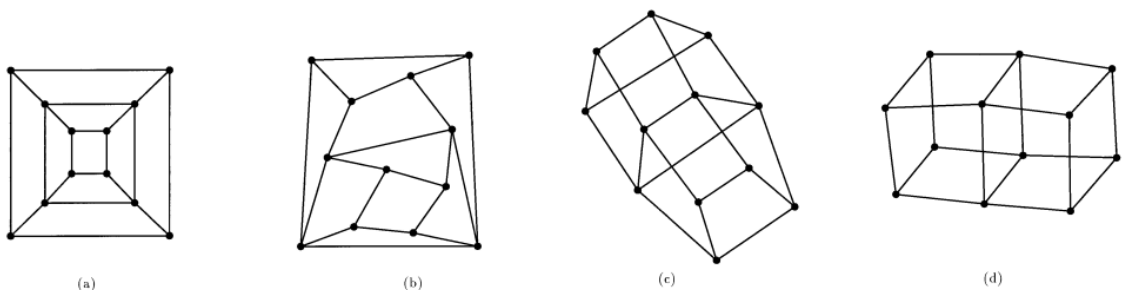


Abbildung 2.7: Zeichnungen des Verfahrens von Davidson und Harel [9]: Durch die Gewichte lässt sich der Fokus auf verschiedene Ästhetikkriterien verschieben – Originalabbildung aus [9].

Eine komplexe Energiefunktion, die mit einer allgemeinen Suchheuristik optimiert wird, haben Davidson und Harel [9] vorgestellt:

$$E_{DH} = \lambda_1 \cdot E_{DH1} + \lambda_2 \cdot E_{DH2} + \lambda_3 \cdot E_{DH3} + \lambda_4 \cdot E_{DH4} \quad (2.6)$$

Die Energiekomponenten sind definiert durch

$$E_{DH1} = \sum_{u,v \in V, u \neq v} 1/d(u,v)^2 \quad (2.7)$$

$$E_{DH2} = \sum_{v_i \in V} (1/l_i^2 + 1/r_i^2 + 1/o_i^2 + 1/u_i^2) \quad (2.8)$$

$$E_{DH3} = \sum_{(u,v) \in E} d(u,v)^2 \quad (2.9)$$

$$E_{DH4} = \text{Anzahl der Kantenkreuzungen} \quad (2.10)$$

Dabei sind l_i, r_i, o_i und u_i die Abstände des Knotens v_i zum linken (l_i), rechten (r_i), oberen (o_i) und unteren (u_i) Rand. E_{DH1} bewirkt die Separation der Knotenpaare. E_{DH2} bewirkt die Einhaltung einer festgelegten Zeichenfläche und die Entfernung vom Rand. E_{DH3} führt zu kurzen Kanten und bewirkt damit die Annäherung benachbarter Knoten. E_{DH4} wirkt in Richtung einer planaren Zeichnung. Die Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ steuern die relativen Gewichte der Energiekomponenten. Abbildung 2.7 zeigt beispielhafte Zeichnungen eines Graphen durch das Verfahren. Hier wird deutlich, wie durch die Gewichtung verschiedene Optimierungsziele in den Vordergrund treten.

Schließlich wird E_{DH} durch die Suchheuristik *Simulated Annealing* von Kirkpatrick, Gelatt und Vecchi [20] optimiert. Dabei wird wiederholt ein einzelner Knoten verschoben, wobei der Radius der Verschiebung mit der Zeit sinkt und die Richtung zufällig gleichverteilt gewählt wird. Der Energiewert der neuen Zeichnung wird bestimmt und mit dem Wert der alten Zeichnung verglichen. Zeichnungen mit niedrigerem Energiewert werden immer akzeptiert. Zeichnungen mit höherem Energiewert werden mit einer Wahrscheinlichkeit akzeptiert, die von der Energiedifferenz abhängt und mit der Zeit sinkt. Dieses Akzeptanzverhalten, das Simulated Annealing auszeichnet, bewirkt einerseits eine geringere Tendenz in lokalen Minima stecken zu bleiben, andererseits führt es zu verlängerten Laufzeiten. Die Integration der Kreuzungsreduktion erweist sich als laufzeitintensiv.

2.2.3 Kräftebasierte Verfahren

Ein Ansatz, der mit energiebasierten Verfahren sehr eng verwandt ist, ist der kräftebasierte Ansatz. Dieser Ansatz geht auf Eades [11] zurück. Kernidee ist eine physikalische Metapher: Knoten werden als geladene Partikel interpretiert, die sich paarweise abstoßen. Kanten werden als Federn aufgefasst, die stets einer Ideallänge entgegenstreben. In diesem Sinne wird pro Iteration für jeden Knoten ein Kräftevektor berechnet. Anders als in der Physik

wird die Kraft als Auslenkung und nicht als Beschleunigung verstanden. Am Ende jeder Iteration wird für alle Knoten der Kräftevektor auf den Positionsvektor addiert.

Kräftebasierte Verfahren sind konzeptionell einfach, leicht zu implementieren und intuitiv um eine Vielzahl von Nebenbedingungen zu erweitern. Außerdem erzielen sie gute Ergebnisse beim Erreichen ähnlicher Kantenlängen und bei der Offenbarung von Symmetrien. Im Kontext dieser Arbeit ist das Verfahren von Bertault [6] von großer Bedeutung.

2.2.3.1 Das Verfahren von Bertault

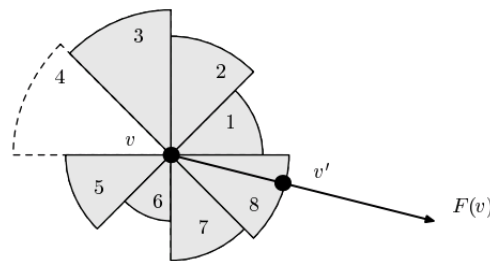


Abbildung 2.8: Durch Zonen wird beim Kräfteverfahren von Bertault [6] sichergestellt, dass keine neuen Kreuzungen entstehen – Originalabbildung aus [6].

Das Kräfteverfahren von Bertault [6] optimiert eine Zeichnung ohne die Kreuzungseigenschaften der Zeichnung zu verändern. Durch die geschickte Berechnung sogenannter Zonen werden die Auslenkungen der Kräfte derart nach oben beschränkt, dass sich zwei Kanten nach einer Iteration dann und nur dann kreuzen, wenn sie es auch vor der Iteration taten. Wendet man das Verfahren also auf eine geradlinig planare Zeichnung an, so erhält man wieder eine geradlinig planare Zeichnung. Abbildung 2.8 zeigt exemplarisch die Zonen für einen Knoten. Im Rahmen dieser Einschränkung verfolgt Bertault einen Kräfteansatz. Die Kraft auf einen Knoten setzt sich zusammen aus

- Anziehung zwischen benachbarten Knoten,
- Abstoßung zwischen allen Knotenpaaren und
- Abstoßung zwischen Knoten und Kanten, sofern die Abstände einen Schwellwert γ unterschreiten.

Anziehende und abstoßende Kräfte zwischen benachbarten Knoten sind so konzipiert, dass sie sich gegenseitig kompensieren, wenn der Abstand der Knoten einer Wunschkantenlänge δ entspricht. Das Verfahren wird im Rahmen dieser Arbeit zum Vergleich herangezogen. Details zur Parametrisierung werden in Abschnitt 4.3 ausgeführt.

2.3 Formmaße für Polygone

Im Rahmen dieser Diplomarbeit sind Formmaße bedeutsam: Sie werden in Kapitel 3.4.3 adaptiert, um die Form der sichtbaren Kreise zu optimieren. Außerhalb dieser Arbeit finden Formmaße unter anderem beim Computer-Sehen Anwendung. Dort geht es darum, die Form von Objekten der realen Welt zu klassifizieren und sie daran zu erkennen. Mingqiang, Kidiyo und Joseph [21] haben einen guten Überblicksartikel zu diesem Thema verfasst. Einleitend werden einfache Polygone definiert. Anschließend folgt die Betrachtung von Maßen der Konvexität und Rundheit.

Ein *Polygon* p der Größe n ist durch n Eckpunkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ gegeben. Man definiert $(x_0, y_0) := (x_n, y_n)$. Der *Rand* des Polygons ist die geschlossene Kurve, die durch das Verbinden zyklisch aufeinander folgender Punkte durch Geradensegmente entsteht. Wenn sich die Kantensegmente nicht schneiden, heißt das Polygon *einfach*. Der Rand eines einfachen Polygons partitioniert die Ebene in zwei Flächen. Die endliche Fläche ist das *Innere* des Polygons. Der *Umfang* (englisch perimeter) $P(p)$ und die *Fläche* (englisch area) $A(p)$ eines einfachen Polygons p können wie folgt berechnet werden:

$$P(p) := \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2} \quad (2.11)$$

$$A(p) := \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) \cdot (x_{i-1} - x_i) \right| \quad (2.12)$$

2.3.1 Konvexität

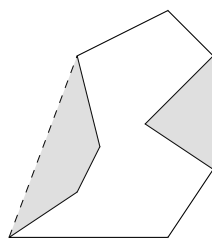


Abbildung 2.9: Ein Polygon und die konvexe Hülle des Polygons.

Die hier vorgestellten Konvexitätsmaße sind einer Veröffentlichung von Zunic und Rosin [30] entnommen. Dort wird ein weiteres Konvexitätsmaß vorgestellt, das hier jedoch nicht adaptiert wird.

Eine Fläche heißt *konvex*, wenn zu jedem Paar von Punkten aus der Fläche auch das Geradensegment, das die Punkte verbindet, komplett in der Fläche liegt. Die *konvexe Hülle* $CH(p)$ eines Polygons p ist die minimale konvexe Fläche, die das Innere des Polygons p enthält. Ein Algorithmus von Graham und Yao [14] berechnet die konvexe Hülle eines einfachen Polygons in Linearzeit.

Die Konvexität eines Polygons kann gemessen werden, indem man Umfang oder Fläche des Polygons mit dem entsprechenden Maß der konvexen Hülle des Polygons in Beziehung setzt.

$$A_{\text{CONVEX}}(p) := \frac{A(p)}{A(\text{CH}(p))} \quad (2.13)$$

$$P_{\text{CONVEX}}(p) := \frac{P(\text{CH}(p))}{P(p)} \quad (2.14)$$

Beide Maße liegen im Intervall $[0, 1]$. Bei A_{CONVEX} liegt dies darin begründet, dass die konvexe Hülle die Polygonfläche vollständig enthält. Entsprechend gilt $A(p) \leq A(\text{CH}(p))$. Bei P_{CONVEX} folgt dies aus der Tatsache, dass die konvexe Hülle eines Polygons wieder ein Polygon ist, das eine Teilmenge der Eckpunkte des ursprünglichen Polygons verwendet. Die Ordnungsbeziehung ist dann eine direkte Folgerung aus der Dreiecksungleichung, die besagt, dass die Länge eines direkten Weges kürzer ist als die Länge eines Umweges. Es gilt $P(\text{CH}(p)) \leq P(p)$. Beide Maße nehmen genau für konvexe Polygone den Wert eins an.

2.3.2 Rundheit

Eine einfaches Maß für die Rundheit eines Polygons verwendet Umfang und Fläche des Polygons. Man setzt die Fläche des Polygons p in Beziehung mit der Fläche eines Kreises $P_{\text{CIRCLE}}(p)$, dessen Umfang dem Umfang des Polygons gleicht.

$$P_{\text{ROUND}}(p) := \frac{A(p)}{A(P_{\text{CIRCLE}}(p))} = \frac{4\pi \cdot A(p)}{P(p)^2} \quad (2.15)$$

Auch dieses Maß liegt im Intervall $[0, 1]$, da der Kreis diejenige geometrische Form ist, bei der ein gegebener Umfang die maximal mögliche Fläche einschließt.

Alternativ ist es möglich, zu einem Polygon p den flächenminimalen Kreis zu berechnen, der das gesamte Polygon enthält. Ein entsprechender Algorithmus von Welzl [29] ist in der Softwarebibliothek CGAL [1] implementiert. Die Fläche des Polygons p kann dann mit der Fläche dieses Passkreises $\text{FIT}_{\text{CIRCLE}}(p)$ verglichen werden.

$$\text{CIRCLE}_{\text{FIT}}(p) := \frac{A(p)}{A(\text{FIT}_{\text{CIRCLE}}(p))} \quad (2.16)$$

Der Wertebereich $[0, 1]$ folgt wieder aus der Teilmengenbeziehung der Flächen.

Kapitel 3

Der Planare Energie-Optimierer (PEO)

In diesem Kapitel wird der Planare Energie-Optimierer (PEO) beschrieben, der im Rahmen dieser Diplomarbeit entwickelt worden ist. Das Verfahren wendet energiebasierte Methoden auf planare Zeichnungen an.

Abschnitt 3.1 stellt den Algorithmus in seinen Grundzügen vor. Dabei werden grundsätzliche Designentscheidungen begründet.

Abschnitt 3.2 befasst sich mit verschiedenen Modulen zur Variation. Dabei steht die Frage im Vordergrund, wie aus einer bestehenden Zeichnung geringfügig veränderte Nachfolgezeichnungen generiert werden können, ohne die Gültigkeit der Zeichnung aufzugeben.

Abschnitt 3.3 bereitet die Entwicklung von Energiekomponenten vor: Es werden verschiedene Lagemaße und Ähnlichkeitsmaße mitsamt einer generischen Notation eingeführt.

Abschnitt 3.4 formalisiert schließlich die Ästhetikkriterien aus Kapitel 2.1.2 durch Energiekomponenten.

Abschnitt 3.5 erweitert das Verfahren, sodass Zeichnungen mit Kreuzungen und Knicken adaptiert werden können.

3.1 Rahmen und Entwurfsentscheidungen

Der Planare Energie-Optimierer (PEO) ist von dem Verhalten eines fiktiven menschlichen Probanden inspiriert. Wenn dieser von einer interaktiven Benutzeroberfläche mit einer verzerrten planaren Graphzeichnung konfrontiert wird, wird er oder sie versuchen, durch wiederholte Anwendung kleiner Änderungen die Qualität der Zeichnung zu verbessern. Dabei wird vor allem das Bemühen im Vordergrund stehen, die Planarität des Graphen zu erhalten. In der Praxis lassen sich viele planare Graphzeichnungen durch lokale manuelle Änderungen noch verbessern. Es ist anzunehmen, dass sich lokale Verbesserungen auch formalisieren lassen.

Für den Algorithmus ist die Definition der Gültigkeit zentral:

3.1.1 Definition (Gültigkeit). Im Kontext einer ursprünglichen planaren Zeichnung mit gegebener planarer Einbettung heißt eine Zeichnung *gültig*, wenn sie den gleichen Graphen planar zeichnet und die planare Einbettung der Zeichnung der ursprünglichen Einbettung entspricht.

Für die weitere Arbeit fixieren wir folgenden Rahmenalgorithmus:

Algorithmus 3.1 Rahmenalgorithmus

Starte mit einer gültigen Zeichnung.

loop

1. Erzeuge durch geringfügige Änderung der aktuellen Zeichnung gültige Nachfolgerzeichnungen.
2. Bewerte alle Zeichnungen durch eine Energiefunktion.
3. Wähle aus der aktuellen Zeichnung und den Kandidaten eine Zeichnung mit maximalem Energiewert.

end loop

Liefere die aktuelle Zeichnung als Ergebnis.

Es handelt sich um eine lokale Suche, wobei die Invariante der Gültigkeit stets erhalten bleibt. Im Folgenden sollen einige naheliegende Alternativen aufgezeigt werden, von denen in dieser Arbeit bewusst Abstand genommen wird.

- **Veränderliche Einbettung:** Es ist nicht unmittelbar einzusehen, warum die Einbettung der Zeichnung unverändert bleiben soll. Die Anzahl der Einbettungen kann exponentiell in der Anzahl der Knoten wachsen und die Wahl einer guten Einbettung ist ein wesentlicher Schlüssel zum Erfolg. Die Fixierung der Einbettung hat zunächst praktische Vorteile: Teile der Energiefunktion, die auf der Einbettung aufbauen, können bei Invarianz effizient aktualisiert werden und müssen andernfalls gänzlich neu berechnet werden. Weiterhin erscheint es unwahrscheinlich, dass kleine Änderungen die Einbettung ändern ohne dabei die Planarität des Graphen zu zerstören. Der topology-shape-metrics-Ansatz von Batini, Nardelli und Tamassia [5] fixiert die Einbettung ebenfalls im Vorhinein. Ein Algorithmus von Gutwenger und Mutzel [15] ermittelt eine Einbettung mit maximaler Außenfläche unter allen Einbettungen mit minimaler Verschachtelungstiefe.
- **Populationsbasierter Ansatz:** Es ist auch denkbar, zu jedem Zeitpunkt eine Population verschiedener Zeichnungen zu verwalten. Populationsbasierte Ansätze sind jedoch nur dann sinnvoll, wenn verschiedene Lösungen unter Verwendung von Rekombinationsoperatoren gewinnbringend zu neuen Lösungen vereint werden können.

Angesichts der harten Einschränkungen, welche durch die Planarität und die festgelegte Einbettung gegeben sind, erscheint eine sinnvolle und erfolgreiche Rekombination aussichtslos.

- **Simulated Annealing:** Ebenso ist es möglich, unter gewissen Umständen eine schlechtere Lösung zu bevorzugen. Der Einsatz der Suchheuristik Simulated Annealing von Kirkpatrick, Gelatt und Vecchi [20] bietet hier eine Möglichkeit. Diese Heuristik verringert die Gefahr, in lokalen Optima stecken zu bleiben. Allerdings sind damit auch längere Optimierzeiten verbunden und die Parametrisierung einer entsprechenden Methode überstiege Rahmen und Fokus dieser Diplomarbeit.
- **Verarbeitung ungültiger Lösungen:** Zuletzt ist es möglich, ungültige Lösungen nicht grundsätzlich zu verwerfen, sondern nur durch einen schlechteren Energiewert zu bestrafen. Darauf wird verzichtet, da die sinnvolle Berechnung anderer Energiekomponenten ohne gegebene Gültigkeit unverhältnismäßig schwierig erscheint. Zudem ist es aus Nutzersicht besser, wenn die Gültigkeit der Ausgabezeichnung garantiert werden kann.

Die nachfolgenden Abschnitte präzisieren den hier vorgestellten Rahmenalgorithmus.

3.2 Module zur Variation

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Erzeugung gültiger Nachfolgerzeichnungen aus einer aktuellen Zeichnung.

Erhaltung der Gültigkeit. Beim Design geeigneter Variationsoperatoren steht die Erhaltung der Gültigkeit im Vordergrund. Hier können prinzipiell zwei Ansätze verfolgt werden:

- **Explizierter Ansatz:** Nach der Festlegung, welche Eigenschaften der Zeichnung grundsätzlich verändert werden sollen (etwa die Position eines bestimmten Knotens), erfolgt eine explizite Berechnung, welche Nachfolgerzeichnungen gültig sind. Dann werden einzelne Nachfolger ausgewählt.
- **Impliziter Ansatz:** Ohne Beachtung der Gültigkeitsanforderungen wird eine Nachfolgerzeichnung generiert. Diese wird dann auf Gültigkeit getestet und bei Nichterfüllung verworfen.

Implizite Ansätze überzeugen durch ihre strukturelle Einfachheit, während explizite Ansätze teilweise mit komplizierten Berechnungen verbunden sind. Bei der Arbeit an dem Algorithmus hat sich früh herausgestellt, dass gute Nachfolgerzeichnungen oft sehr lokal sind. Sie unterscheiden sich von den Vorgängerzeichnungen meist nur durch geringfügige

Änderungen. Explizite Algorithmen fördern demgegenüber oft sehr weit entfernte Nachfolgerzeichnungen zu Tage. Im Zuge der Auswahl aus der explizit errechneten Kandidatenmenge sollten also nahe Positionen bevorzugt werden, was wiederum zu der Frage führt, warum nicht direkt ein naher Kandidat erzeugt wird.

Zur Variation werden deshalb nur implizite Ansätze verwendet.

Keine eigene Suchrichtung. Es ist ein sinnvolles Ziel, die Variationsoperatoren von der Energiefunktion zu entkoppeln. Die Variationsoperatoren sollen nicht heuristisches Wissen über gute Zeichnungen umsetzen – und etwa einen Knoten in die Mitte von zwei anderen Knoten platzieren. Vielmehr sollen sie ohne Vorbehalte verschiedene Veränderungen anbieten. Die Auswahl geschieht allein durch die Selektion bezüglich der Energiefunktion.

Variationsarten. Es werden zwei Variationsarten eingeführt:

Abschnitt 3.2.1 behandelt die Verschiebung einzelner Knoten.

Abschnitt 3.2.2 behandelt die Blocktransformation.

Die Auswahl der Variationsart erfolgt nach einem einfachen Schema: Sei $|V|$ die Anzahl der Knoten des Graphen und $|B|$ die Anzahl der Blöcke des Graphen. Mit Wahrscheinlichkeit $|V|/(|V| + |B| - 1)$ wird eine Knotenverschiebung durchgeführt. Andernfalls erfolgt eine Blocktransformation.

3.2.1 Verschiebung einzelner Knoten

Bei der Verschiebung einzelner Knoten ist zu klären, welcher Knoten verschoben werden soll, wie viele neue Positionen generiert werden und wie neue Positionen zu generieren sind. Diese Fragen werden nachfolgend erörtert.

Knotenauswahl. Der Knoten zur Verschiebung wird zufällig gleichverteilt unter allen Knoten gewählt. Die folgenden primitiven Strategien sind untersucht worden, haben aber bei ersten Untersuchungen keinen Vorteil gegenüber der gleichverteilten Auswahl gezeigt:

- Abarbeiten einer zufälligen Reihenfolge der Knoten.
- DFS/BFS-Traversierungen ausgehend von einem zufälligen Knoten.
- Absteigendes/Aufsteigendes Sortieren der Knoten nach ihrem Abstand von einem zufälligen Knoten (Sweepball).
- Sortieren der Knoten nach dem Skalarprodukt aus der Knotenposition und einer zufälligen Richtung (Sweepine).

Bedarfsorientierte Strategien gestalten sich schwierig, da sie den Einfluss eines Knotens am Wert der Energiefunktion messen müssen. Im Hinblick auf die Vielzahl der Energiefunktionen, die im Rahmen der Arbeit erforscht werden, wird auf eine bedarfsorientierte

Strategie verzichtet. So bleibt die oben angesprochene Entkopplung von Energiefunktion und Variation gewährleistet.

Anzahl der neuen Positionen. Es werden vier neue Positionen erzeugt. Im Falle des Ausscheidens einzelner Positionen wegen Ungültigkeit werden keine zusätzlichen Positionen erzeugt.

Generierung neuer Positionen. Die Berechnung einer neuen Position für einen Knoten v geschieht wie folgt:

- Bestimme die durchschnittliche Kantenlänge L der Kanten um v .
- Wähle zufällig gleichverteilt $\alpha \in [0, 2\pi]$, $z \in]0, 1]$ und $n \in]0, 1]$.
- Setze $D := L \cdot z/n$.
- Erhalte die neue Position, indem die Position des Knotens um Distanz D in Richtung des Winkels α verschoben wird.

Aus Gründen der inneren Abgeschlossenheit erfolgt eine Orientierung an L , der durchschnittlichen Kantenlänge um den Knoten. Wegen der Symmetrie in der Auswahl von z und n gilt für jedes $k > 0$ der Zusammenhang $Pr(D = L \cdot k) = Pr(D = L/k)$. Außerdem zeigt man leicht, dass für $k \geq 1$ der Zusammenhang $Pr(D \geq L \cdot k) = Pr(D \leq L/k) = 1/(2k)$ gilt. D liegt also mit Wahrscheinlichkeit $1/k$ nicht im Intervall $[L/k, L \cdot k]$. Entsprechend werden für D vielfältige Werte generiert. Die Häufung um die durchschnittliche Kantenlänge scheint mit Blick auf verschiedene Graphzeichnungen vertretbar. Hier wären auch adaptive Strategien denkbar, die den Wert der Referenzlänge L unter Berücksichtigung des Variationserfolges anpassen. Diese werden aber im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt.

Gültige Verschiebungen. Um zu verdeutlichen, welche Positionen für eine Knotenverschiebung in Frage kommen, wird die Idee eines expliziten Berechnungsansatzes an einem Beispiel skizziert.

Abbildung 3.1(a) zeigt eine Graphzeichnung. Es soll ermittelt werden, welche neuen Positionen für den schwarzen Knoten in Frage kommen, sodass die Gültigkeit erhalten bleibt.

Zunächst ist klar, dass die neue Position innerhalb des Polygons liegen muss, das von den Kanten gebildet wird, die sich ein Gebiet mit dem schwarzen Knoten teilen, aber nicht den schwarzen Knoten zum Endknoten haben. Dies lässt sich wie folgt begründen: Betrachtet man einen beliebigen Nachbarn des schwarzen Knotens, etwa den roten Knoten, so muss die Kante vom roten zum schwarzen Knoten bei dem roten Knoten in das Polygon hineinragen, da sonst die Einbettung um den roten Knoten verändert würde. Läge eine gültige

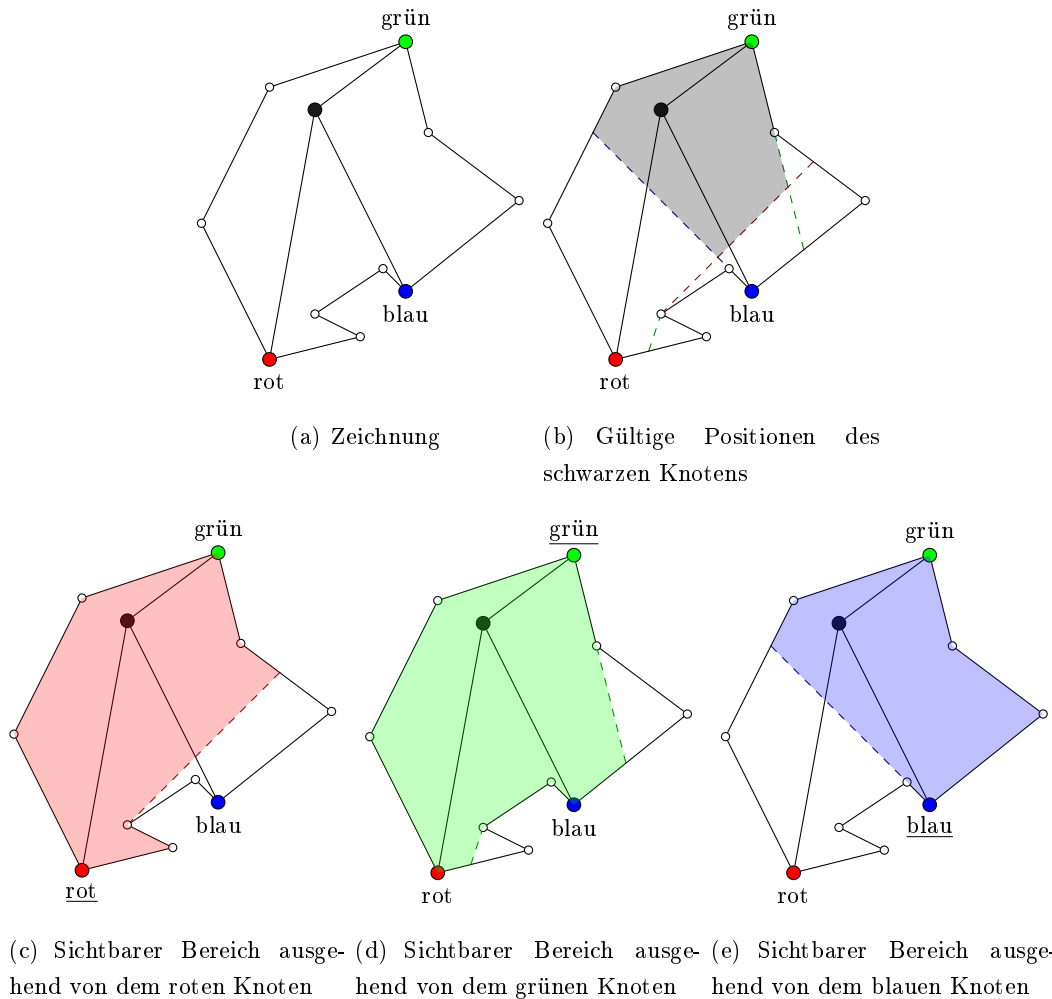


Abbildung 3.1: Explizite Beschreibung der gültigen Punktmenge bei der Verschiebung eines einzelnen Knotens: Abbildung (a) zeigt eine beispielhafte Zeichnung. Gültige Positionen des schwarzen Knotens sind in Abbildung (b) grau hinterlegt. Es handelt sich um den Schnitt der Polygone aus den Abbildungen (c)-(e). Dies sind sichtbare Positionen ausgehend von dem roten (c), grünen (d) und blauen (e) Knoten, die Nachbarn des schwarzen Knotens sind. Betrachtet werden nur Positionen innerhalb des Polygons aus allen Kanten, die sich ein Gebiet mit dem schwarzen Knoten teilen, aber nicht den schwarzen Knoten als Endknoten haben.

Position außerhalb des Polygons, müsste die besagte Kante das Polygon wieder verlassen. Beim Verlassen entstünde aber eine Kreuzung, was im Widerspruch zur Planarität steht.

Da beim Verschieben des schwarzen Knotens nur die angrenzenden Kanten verschoben werden, kommen auch nur diese für neue Kreuzungen in Frage. Für eine neue Position muss gelten, dass für jeden Nachbarn des verschobenen Knotens das Geradensegment vom Nachbarn zur neuen Position keine Kante schneidet. Anders formuliert heißt dies, dass die neue Position von jedem Nachbarn aus sichtbar sein muss. Die Abbildungen 3.1(c)-(e) zeigen die Sichtbarkeitseinschränkungen des Polygons für alle Nachbarn.

Der Schnitt dieser eingeschränkten Polygone, wie er in Abbildung 3.1(b) zu sehen ist, ist schließlich die gültige Punktmenge.

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass sich Änderungen ergeben, falls der Knoten ein Schnittknoten ist oder an die Außenfläche angrenzt.

Im Fall eines Schnittknotens bilden die Kanten, die sich ein Gebiet mit dem betrachteten Knoten teilen, kein geschlossenes Polygon. Daher muss eine differenziertere Betrachtung erfolgen.

Die gültige Punktmenge für Knoten an der Außenfläche enthält meistens unendlich viele Punkte. In vielen Situationen, in denen nicht starke Einschränkungen durch Nachbarknoten dem entgegenstehen, können Knoten auf dem Rand beliebig weit von dem Graphen entfernt werden, ohne dass die Gültigkeit verletzt wird.

3.2.2 Blocktransformation

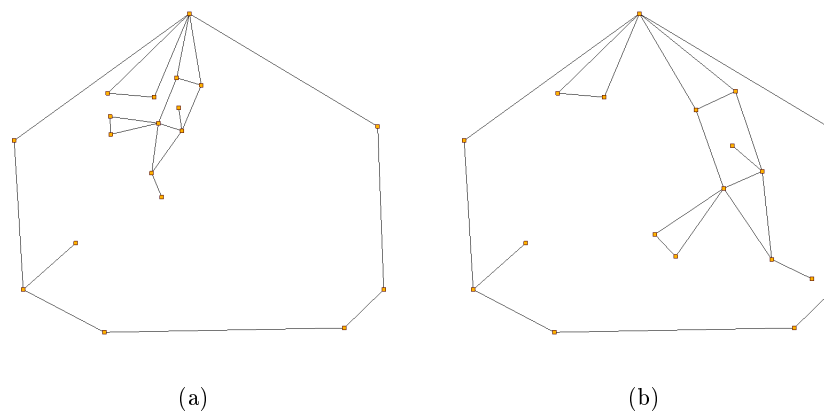


Abbildung 3.2: Blocktransformation am Beispiel einer verschachtelten Zeichnung: Aus Zeichnung (a) entsteht durch Rotieren und Skalieren verschiedener Knotenpositionen um einen Schnittknoten die Zeichnung (b).

Eine weitere Variationsart ist die Blocktransformation. Dieser Variationsoperator findet bei Graphen Anwendung, die nicht zweizusammenhängend sind. Insbesondere schließt dies die Klasse der Bäume mit ein. Abbildung 3.2 zeigt eine Zeichnung vor und nach Anwendung einer Blocktransformation und vermittelt ein intuitives Verständnis, was diese Variationsart leistet. Aus Zeichnung (a) entsteht durch Rotieren und Skalieren einiger Knotenpositionen um einen Schnittknoten die Zeichnung (b). Nachfolgend wird die Blocktransformation definiert. Anschließend erfolgt eine Diskussion der Parameterauswahl.

3.2.1 Definition (Blocktransformation). Zu dem Graphen einer gegebenen Zeichnung betrachte man einen BC-Baum, der einen Block zur Wurzel hat, dem eine Kante des Außengebietes angehört. Zu einem Block B , der nicht Wurzel des BC-Baumes ist, einem Winkel

$\alpha \in [-\pi, +\pi]$ und einem Skalierungsfaktor $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ ist die *Blocktransformation* folgendermaßen definiert:

Sei c der Schnittknoten, der Elter von B ist. Sei B^* die Menge aller Blöcke einschließlich B , die im BC-Baum unterhalb von B liegen. Sei $E(B^*)$ die Menge aller Kanten von Blöcken aus B^* und schließlich $V(B^*)$ die Menge aller Knoten, die Endknoten mindestens einer Kante aus $E(B^*)$ sind. Dann wird die Position jedes Knotens $v \in V(B^*)$ wie folgt verändert: Der Richtungsvektor von c nach v wird in Polarkoordinaten umgewandelt. Anschließend wird α zu dem Winkel addiert und die Länge mit s multipliziert. Die neue Position von v erhält man durch Addieren des transformierten Vektors auf die Position von c .

Auswahl des Blocks und der Parameter. Auch hier gestaltet sich eine Bedarfsauswahl schwierig. Der Block B wird deshalb zufällig gleichverteilt aus allen Blöcken des Graphen ohne die Wurzel des BC-Baumes gewählt.

Für die Parameterauswahl ist zunächst Symmetrie wünschenswert. Um eine Richtung des Suchoperators zu vermeiden, sollte der Block in gleicher Weise wachsen wie schrumpfen können. Präziser soll für jeden Wachstumsfaktor $x > 0$ gelten: $Pr(s = x) = Pr(s = 1/x)$. Genauso soll bei gegebener Auslenkung eine Drehung mit dem Uhrzeigersinn ebenso wahrscheinlich sein wie eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn. Präziser soll für jeden Winkel $\gamma \in [0, \pi]$ gelten: $Pr(\alpha = +\gamma) = Pr(\alpha = -\gamma)$. Zuletzt sollen kleine Änderungen wahrscheinlicher sein als große Änderungen.

Insgesamt definieren wir

$$s = U([0, 1])^{U(\{-1, +1\})/10} \quad (3.1)$$

$$\alpha = U(\{-1, +1\}) \cdot U([0, 1])^5 \cdot \pi \quad (3.2)$$

Dabei ist $U(M)$ eine Funktion, die ein uniform zufälliges Element aus M liefert. Im Falle von s wird also aus einer Zufallszahl zwischen 0 und 1 die zehnte Wurzel gezogen, was eine Annäherung zur 1 bewirkt. Durch den Exponenten -1 oder $+1$ wird entschieden, ob der so erhaltene Stauchungsfaktor im Zähler oder Nenner Verwendung findet. Im Falle von α wird die Drehrichtung zufällig entschieden. Die uniforme Auslenkung aus dem Intervall $[0, 1]$ wird mit fünf potenziert, was eine Annäherung zur 0 bewirkt. Dieser Wert wird mit π multipliziert, damit der gesamte Winkelbereich abgedeckt ist. Es ist trivial zu sehen, dass diese Auswahl der Parameter s und α die Forderungen erfüllt.

3.3 Konstrukte zur Aggregation gleichartiger Daten

Im Rahmen des Designs von Energiekomponenten werden immer wieder Konstrukte benötigt, um gleichartige Daten zusammenzuführen. Diese Arbeit verfolgt in dieser Hinsicht

einen generischen Ansatz. In diesem Abschnitt wird eine Notation für Lagemaße und Ähnlichkeitsmaße eingeführt. Auch grundsätzliche Eigenschaften der Lagemaße und Ähnlichkeitsmaße werden definiert. Es folgt eine Auflistung mathematischer Funktionen, welche diese Konzepte realisieren. Bei der Entwicklung konkreter Energiekomponenten in Kapitel 3.4 wird dann auf die abstrakte Notation zurückgegriffen. Im Rahmen experimenteller Studien in Kapitel 5 wird zuletzt die Angemessenheit verschiedener Realisierungen ermittelt.

Dieser Abschnitt ist wesentlich durch die deskriptive Statistik inspiriert. Hier bietet Ferschl [13] eine gute Einführung. Konkrete Lagemaße und die grundsätzlichen Ideen zur Konstruktion von Ähnlichkeitsmaßen sind diesem Buch entnommen.

3.3.1 Lagemaße

Notation. Sei M eine Menge, $\text{WERT} : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion, welche den Elementen der Menge einen Wert zuordnet und $\text{GEWICHT} : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion, welche die Gewichte von Elementen aus der Menge angibt. Dann schreibe für ein Lagemaß:

$$\bigoplus_{m \in M} [\text{GEWICHT}(m), \text{WERT}(m)]$$

Lagemaße sollen die Werte einer Datenreihe zu einem repräsentativen Stellvertreterwert aus dem Wertebereich \mathbb{R}^+ zusammenführen. Der Stellvertreterwert muss nicht notwendigerweise Wert eines Elementes sein. Ein Lagemaß erfüllt folgende Eigenschaften:

- Beschränkung des Wertebereichs: Das Lagemaß liegt stets zwischen dem minimalen und maximalen WERT eines Elementes.
- Durchlässigkeit gegenüber der WERT-Multiplikation: Multipliziert man den WERT aller Elemente mit einem gemeinsamen Faktor s , so ist der neue Wert des Lagemaßes das Produkt aus dem alten Wert und dem Faktor s .
- Invarianz gegenüber GEWICHT-Multiplikation: Multipliziert man das GEWICHT aller Elemente mit einem gemeinsamen Faktor, so bleibt das Lagemaß unverändert.
- Monotonie: Bei Veränderung einzelner Funktionswerte verhält sich das Lagemaß der Änderung entsprechend:
 - Erhält ein Element einen größeren WERT, so wird das Lagemaß dadurch höchstens größer. Erhält ein Element einen kleineren WERT, so wird das Lagemaß dadurch höchstens kleiner.
 - Erhält ein Element, dessen WERT unterhalb des Lagemaßes liegt ein größeres GEWICHT, so wird das Lagemaß höchstens kleiner. Erhält ein Element, dessen WERT überhalb des Lagemaßes liegt ein größeres GEWICHT, so wird das Lagemaß höchstens größer. Umgekehrtes gilt bei der Verringerung des Gewichts.

3.3.1.1 Realisierung

Als Realisierungen werden die folgenden bekannten Mittelwerte und Extremwerte vorgeschlagen:

$$\text{AM} := \text{ARITHMETISCHESMITTEL} = \sum_{m \in M} \text{WERT}(m) \cdot \frac{\text{GEWICHT}(m)}{\sum_{m \in M} \text{GEWICHT}(m)} \quad (3.3)$$

$$\text{GM} := \text{GEOMETRISCHESMITTEL} = \prod_{m \in M} \text{WERT}(m)^{\frac{\text{GEWICHT}(m)}{\sum_{m \in M} \text{GEWICHT}(m)}} \quad (3.4)$$

$$\text{MIN} := \min_{m \in M} \text{WERT}(m) \quad (3.5)$$

$$\text{MAX} := \max_{m \in M} \text{WERT}(m) \quad (3.6)$$

In vielen Fällen werden Qualitätsmaßzahlen zusammengefügt, deren Wert auf das Intervall $[0, 1]$ beschränkt ist und die dem Wert eins möglichst nahe kommen sollen. In diesem Fall macht es Sinn, die Qualitätsmaßzahlen als Vektor aufzufassen und den Abstand zum Einsvektor zu messen. Setzt man diesen Abstand ins Verhältnis zum maximal möglichen Abstand erhält man wieder einen Wert im Intervall $[0, 1]$. Dieser kann von eins subtrahiert werden, um wieder eine Qualitätsmaßzahl zu erhalten: Geringer Abstand vom Einsvektor bedeutet hohe Qualität. Generalisiert man diese Überlegungen für beliebige Gewichte und legt die L_k -Abstandsmetrik zu Grunde, erhält man die nachfolgende Formel für ONED_k :

$$\text{ONED}_k := 1 - \sqrt[k]{\frac{\sum_{m \in M} (1 - \text{WERT}(m))^k \cdot \text{GEWICHT}(m)}{\sum_{m \in M} \text{GEWICHT}(m)}} \quad (3.7)$$

Dieses Maß erfüllt die obigen Eigenschaften, jedoch nicht die Durchlässigkeit der WERT-Multiplikation. Je größer der Wert k wird, desto stärker fallen geringe Werte ins Gewicht.

3.3.2 Ähnlichkeitsmaße

Notation. Sei M eine Menge, $\text{WERT} : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion, welche den Elementen der Menge einen Wert zuordnet und $\text{GEWICHT} : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion, welche die Gewichte von Elementen aus der Menge angibt. Dann schreibe für ein Ähnlichkeitsmaß:

$$\underset{m \in M}{\approx} [\text{GEWICHT}(m), \text{WERT}(m)]$$

Falls alle Elemente gleiches Gewicht erhalten, schreibe:

$$\underset{m \in M}{\approx} \text{WERT}(m)$$

Ähnlichkeitsmaße sollen messen, wie ähnlich sich die WERTE der Elemente sind. Diese Forderung lässt sich nur schwer durch Eigenschaften beschreiben ohne eine konkrete Realisierung vorwegzunehmen. Es sollen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- Beschränkung des Wertebereichs: Der Wertebereich ist das Intervall $[0, 1]$. Der Wert 1 wird genau dann angenommen, wenn sich alle WERTE gleichen.
- Invarianz gegenüber WERT-Multiplikation: Multipliziert man alle WERTE mit einem gemeinsamen Faktor s , so bleibt das Ähnlichkeitsmaß unverändert.

3.3.2.1 Realisierung

Die einfachste Form der Ähnlichkeitsmaße setzt Lagemaße in Beziehung, zwischen denen eine definierte Ordnungsbeziehung besteht. Aus $\text{MIN} \leq \text{AM} \leq \text{MAX}$ lassen sich die folgenden Ähnlichkeitsmaße konstruieren:

$$\text{MIN/MAX} \quad (3.8)$$

$$\text{MIN/AM} \quad (3.9)$$

$$\text{AM/MAX} \quad (3.10)$$

Diese Maße zeichnen sich durch ihre besondere Sensitivität gegenüber Ausreißern aus. Alternativ können Paare von Elementen verglichen werden und die Ähnlichkeitswerte der Paare zusammengeführt werden. Teilt man zur Bestimmung der Ähnlichkeit den kleineren durch den größeren Wert und mittelt geometrisch, so ergibt sich auf natürliche Weise die Definition von MQ:

$$\begin{aligned} \text{PAARGEWICHT}(a, b) &:= \text{GEWICHT}(a) \cdot \text{GEWICHT}(b) \\ \text{QUOTIENT}(a, b) &:= \min \left\{ \frac{\text{WERT}(a)}{\text{WERT}(b)}, \frac{\text{WERT}(b)}{\text{WERT}(a)} \right\} \\ \text{MQ} := \text{MITTLERERQUOTIENT} &:= \underset{\substack{a, b \in M \\ a \neq b}}{\text{GM}} [\text{PAARGEWICHT}(a, b), \text{QUOTIENT}(a, b)] \quad (3.11) \end{aligned}$$

Zuletzt kann ein Ähnlichkeitsmaß durch Umkehrung aus einem dimensionslosen Streuungsmaß gewonnen werden. Solche dimensionslosen Streuungsmaße lassen sich konstruieren, indem man ein dimensionsbehaftetes Streuungsmaß durch ein Lagemaß teilt. Einheiten, die den Werten der Elemente anhaften, finden dann in Zähler und Nenner Verwendung und heben sich durch die Division auf.

Nachfolgend soll dies geschehen: Als Streuungsmaß wird der mittlere Abstand zwischen den Werten zweier Elemente verwendet. In den Formeln ist dieser mit `MITTLEREDIFFERENZ` bezeichnet. Als Lagemaß findet ein spezielles arithmetisches Mittel Anwendung, welches

das Gewicht eines Elementes anhand der Gewichtssumme der Vergleiche, an denen das Element beteiligt ist, bemisst. Dieser Mittelwert ist mit VERGLEICHSMITTEL bezeichnet. Schließlich ergibt sich das Ähnlichkeitsmaß MD, dessen Name an die Herleitung durch MITTLEREDIFFERENZ erinnern soll:

$$\begin{aligned}
 \text{ABSTAND}(a, b) &:= |\text{WERT}(a) - \text{WERT}(b)| \\
 \text{MITTLEREDIFFERENZ} &:= \underset{\substack{a, b \in M \\ a \neq b}}{\text{AM}} [\text{PAARGEWICHT}(a, b), \text{ABSTAND}(a, b)] \quad (3.12) \\
 \text{VERGLEICHSGEWICHT}(a) &:= \sum_{\substack{b \in M \\ a \neq b}} \text{PAARGEWICHT}(a, b) \\
 \text{VERGLEICHSMITTEL} &:= \underset{a \in M}{\text{AM}} [\text{VERGLEICHSGEWICHT}(a), \text{WERT}(a)] \\
 \text{MD} &:= 1 - \frac{\text{MITTLEREDIFFERENZ}}{2 \cdot \text{VERGLEICHSMITTEL}} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Es handelt sich um ein Ähnlichkeitsmaß, da ähnliche Werte geringe Differenzen implizieren und eine Annäherung von MD an den Wert eins bewirken.

Man zeigt leicht, dass $\text{MITTLEREDIFFERENZ} \leq 2 \cdot \text{VERGLEICHSMITTEL}$ gilt, indem man den Abstand der Paare durch die Summe der verglichenen Elementwerte abschätzt. Dies wird durch die Positivität der Werte möglich. Durch Umgruppieren der Summanden erhält man direkt das doppelte VERGLEICHSMITTEL. Der Wert von MD liegt also im Intervall $[0, 1]$.

Die Invarianz gegenüber WERT-Multiplikation ist gegeben, da sich gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner aufheben.

Damit genügt auch dieses Ähnlichkeitsmaß den definierten Anforderungen. Bei gleichen Gewichten entspricht VERGLEICHSMITTEL exakt AM.

3.3.2.2 Effiziente Berechnung

Die Definitionen von MQ und MD haben einen konzeptionellen Fokus. Im Hinblick auf die effiziente Berechnung ist entscheidend, dass nicht alle Paare von Elementen betrachtet werden müssen. Zunächst kann MQ durch Logarithmieren auf MITTLEREDIFFERENZ zurückgeführt werden. Man verifiziert leicht den folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 &\log \text{MQ}([g_1, a_1], \dots, [g_n, a_n]) \\
 &= - \text{MITTLEREDIFFERENZ}([g_1, \log a_1], \dots, [g_n, \log a_n]) \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Zur effizienten Berechnung von $\text{MITTLEREDIFFERENZ}(M)$ kann M in zwei disjunkte Teilmengen M_1 und M_2 zerlegt werden, wobei der WERT jedes Elementes in M_1 kleiner oder gleich dem WERT jedes Elementes in M_2 ist. Dann entstehen drei Klassen von Elementpaaren über M :

- Beide Elemente stammen aus M_1 .
- Beide Elemente stammen aus M_2 .
- Ein Element stammt aus M_1 und eines aus M_2 .

Für alle Abstände der ersten beiden Klassen kann vereinfachend die MITTLEREDIFFERENZ der Teilmengen M_1 und M_2 angesetzt werden. Mengenübergreifend wird jedes Element aus M_1 mit jedem Element aus M_2 verglichen, wobei wegen der festgelegten Ordnungsbeziehung stets die Werte der Elemente aus M_1 von den Werten der Elemente aus M_2 abgezogen werden. Für alle mengenübergreifenden Differenzen kann deshalb vereinfachend $AM(M_2) - AM(M_1)$ angesetzt werden. Eine detaillierte Betrachtung, die auch die Gewichte mit berücksichtigt, liefert schließlich eine Rekursionsformel für MITTLEREDIFFERENZ, die man leicht mit vollständiger Induktion verifiziert.

Es werden folgende Funktionen berechnet:

$$\begin{aligned}
 W(M) &= \sum_{m \in M} \text{GEWICHT}(m) \\
 PW(M) &= \sum_{\substack{m_1, m_2 \in M \\ m_1 \neq m_2}} \text{PAARGEWICHT}(m_1, m_2) \\
 AM(M) & \\
 \text{MDIFF}(M) &= \text{MITTLEREDIFFERENZ}(M)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Für einelementige Mengen $M = \{x\}$ mit $\text{GEWICHT}(x) = g$ und $\text{WERT}(x) = a$ gilt:

$$\begin{aligned}
 W([g, a]) &= g \\
 PW([g, a]) &= 0 \\
 AM([g, a]) &= a \\
 \text{MDIFF}([g, a]) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Sei $M = M_1 \circ M_2$ eine Zerlegung der Menge M in zwei Teilmengen M_1 und M_2 , wobei der WERT jedes Elementes in M_1 kleiner oder gleich dem WERT jedes Elementes in M_2 ist. Dann gelten folgende Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned}
 W(M_1 \circ M_2) &= W(M_1) + W(M_2) \\
 PW(M_1 \circ M_2) &= PW(M_1) + PW(M_2) + W(M_1) \cdot W(M_2) \\
 AM(M_1 \circ M_2) &= \frac{W(M_1)}{W(M)} \cdot AM(M_1) + \frac{W(M_2)}{W(M)} \cdot AM(M_2) \\
 \text{MDIFF}(M_1 \circ M_2) &= \frac{PW(M_1)}{PW(M)} \cdot \text{MDIFF}(M_1) + \frac{PW(M_2)}{PW(M)} \cdot \text{MDIFF}(M_2) \\
 &\quad + \frac{W(M_1) \cdot W(M_2)}{PW(M)} \cdot (AM(M_2) - AM(M_1))
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.4 Komponenten einer Energiefunktion

Schon in Abschnitt 2.1.2 sind Ästhetikkriterien für Graphzeichnungen beleuchtet worden. Das Zeichnen von Graphen ist eine offensichtlich stark mehrkriterielle Optimierungsaufgabe. Diese eher qualitativen Optimierungsziele durch mathematische Funktionen zu modellieren ist Gegenstand dieses Abschnitts. Für ein energiebasiertes Verfahren ist die Entwicklung einer bestmöglichen Energiefunktion ein wesentlicher Schlüssel zum Erfolg.

Abschnitt 3.4.1 definiert Anforderungen an Energiekomponenten, die dem Entwurf zu Grunde liegen. In den nachfolgenden Abschnitten werden Energiekomponenten zu verschiedenen Optimierungszielen aufgeführt.

Abschnitt 3.4.2 beschreibt die Interpretation der Gültigkeit als Energiekomponente.

Abschnitt 3.4.3 definiert Energiekomponenten zur Optimierung der Form der sichtbaren Kreise.

Abschnitt 3.4.4 behandelt Energiekomponenten zum Erreichen ähnlicher Kantenlängen.

Abschnitt 3.4.5 führt eine Energiekomponente ein, welche die Separation der Knoten erfasst.

Abschnitt 3.4.6 definiert eine Energiekomponente für ähnliche Winkel.

Abschnitt 3.4.7 beschreibt eine Energiekomponente zur Annäherung von Knotenpaarabständen an einen idealen Abstand.

3.4.1 Anforderungen

Bei der Entwicklung der nachstehenden Energiekomponenten werden folgende Anforderungen beachtet:

- **Aggregierbarkeit:** Da verschiedene Komponenten zu einer Energiefunktion zusammengefügt werden, ist die Vergleichbarkeit verschiedener Komponenten untereinander wichtig. Deshalb werden für alle Komponenten gemeinsame Konventionen zu Grunde gelegt.
 - Dimensionslosigkeit: Auch wenn Maßzahlen im Rechner nur durch ihren Betrag repräsentiert sind, soll nicht vergessen werden, dass ihnen prinzipiell eine Einheit anhaftet. Es ist wenig ratsam Kantenlängen, Winkelgrößen und die Knickanzahl zu verrechnen, ohne sie vorher geeignet zu normieren. Energiekomponenten sollen daher dimensionslos sein.
 - Wertebereich: Der Wertebereich jeder Komponente entspricht dem Intervall $[0, 1]$. Dabei erhält eine degenerierte und maximal hässliche Zeichnung den Wert 0. Eine ideale Zeichnung erhält den Wert 1. Es wird maximiert.
- **Aussagekraft:** Allen Energiekomponenten soll eine verständliche, intuitive Bedeutung anhaften. Nur so kann bei einer späteren Analyse der Verlauf der Energiewerte

sinnvoll gedeutet werden. Beim Zusammenführen von Energiekomponenten wird zu Gunsten der Aussagekraft gemittelt statt aufsummiert.

- **Innere Abgeschlossenheit und Invarianz gegenüber Ähnlichkeitstransformationen:** Es ist nicht einzusehen, warum sich der Wert einer Energiekomponente ändern sollte, wenn die gesamte Zeichnung gedreht, verschoben oder skaliert wird. Auf die Verwendung von Wunschkantenlängen und vergleichbaren Parametern wird bewusst zu Gunsten der inneren Abgeschlossenheit verzichtet.
- **Vergleichbarkeit bei verschiedenen Graphen:** Energiekomponenten sollen auch für unterschiedliche Graphen vergleichbare Ergebnisse liefern und nicht durch graph-spezifische Eigenarten verzerrt werden, die nicht von Interesse sind.

Nachstehend werden die entwickelten Energiekomponenten aufgeführt, die nach Optimierungszielen gruppiert sind.

3.4.2 Gültigkeit

Es ist möglich, die Gültigkeit als Energiekomponente zu formulieren. So kann die Gültigkeit ebenso wie andere Energiekomponenten automatisch und effizient aktualisiert werden. Im Hinblick auf die Erweiterung um Kreuzungen, die in Kapitel 3.5 folgt, ist ein solcher Ansatz für den Gültigkeitstest anzuraten, da das Mitverschieben von Kreuzungsknoten in Bezug auf nötig werdende Gültigkeitstests einen Ketteneffekt auslöst.

Die Gültigkeit setzt sich wie folgt zusammen:

- **Unveränderte kombinatorische Einbettung:** Um jeden Knoten muss die zyklische Ordnung der Kanten unverändert bleiben. Dies lässt sich testen, indem die aktuelle zyklische Ordnung bestimmt und in einem linearen Durchlauf mit der ursprünglichen Ordnung verglichen wird. Es reicht nicht aus, für alle in der ursprünglichen Einbettung zyklisch aufeinander folgenden Kantentripel (e_1, e_2, e_3) zu testen, ob e_2 im Uhrzeigersinn zwischen e_1 und e_3 liegt. Ein Gegenbeispiel ist die Änderung der zyklischen Ordnung von $(1, 2, 3, 4, 5)$ zu $(1, 4, 2, 5, 3)$.
- **Gleichbleibendes Außengebiet:** Um die Invarianz des Außengebietes zu gewährleisten, kann man sich zu Nutze machen, dass die Orientierung des Außengebietes von der Orientierung der anderen Gebiete abweicht. Berechnet man die durch das ursprüngliche Außengebiet umfasste orientierte Fläche, so muss das Vorzeichen negativ sein.
- **Planarität:** Zusammen mit der fixierten Einbettung reicht es, für jedes Gebiet die Kreuzungsfreiheit der Kanten des Gebietes zu verifizieren.

Die gesamte Energiefunktion wird so gestaltet, dass bei verletzter Gültigkeit der Energiewert null zugewiesen wird.

3.4.3 Wohlgeformte Kreise

Anders als in bisherigen energiebasierten Verfahren sind bei PEO durch die fixierte Einbettung alle Gebiete bekannt. Dies ermöglicht die explizite Berücksichtigung der Form der sichtbaren Kreise.

3.4.3.1 Identifikation der Kreiszyklen

Die sichtbaren Kreise erhält man, wenn man für jeden Gebietszyklus die Kanten nach Blockzugehörigkeit zusammenfasst. Zweizusammenhängende Gebiete werden dabei komplett als Kreiszyklen übernommen. Bei Gebieten, in deren Inneres Blöcke eingebettet sind, findet eine Zerteilung statt. Gleiches geschieht mit dem Außengebiet, falls dieses aus mehreren Blöcken besteht. Algorithmus 3.2 realisiert die Zerteilung eines Gebietszyklus in Kreiszyklen in Linearzeit.

Algorithmus 3.2 Zerteilung eines Gebietes in Kreiszyklen

Eingabe: Gebietszyklus $[v_0, \dots, v_n]$ mit $v_0 = v_n$

Ausgabe: Menge der Kreiszyklen C_B inklusive Brücken

```

 $C_B \leftarrow \emptyset$ 
Stack  $S \leftarrow []$ 
for  $i = 0, \dots, n$  do
   $INS[v_i] \leftarrow \text{false}$ 
end for
for  $i = 0, \dots, n$  do
  if  $INS[v_i] = \text{true}$  then
    // Kreiszyklus bis zum Schnittknoten  $v_i$  vom Stack entfernen
    Queue  $Q \leftarrow [v_i]$ 
    repeat
       $v \leftarrow S.\text{pop}()$ 
       $INS[v] \leftarrow \text{false}$ 
       $Q.\text{put}(v)$ 
    until  $v = v_i$ 
     $C_B \leftarrow C_B \cup \{Q\}$ 
  end if
  // Knoten auf dem Stack sammeln
   $S.\text{push}(v_i)$ 
   $INS[v_i] \leftarrow \text{true}$ 
end for
return  $C_B$ 

```

Dazu werden die Knoten des Gebietszyklus auf einem Stack S gesammelt. Wird ein Knoten mehrfach besucht, handelt es sich um einen Schnittknoten. In diesem Fall wird S bis zum vorherigen Vorkommen des Schnittknotens geleert und die entfernten Knoten werden als neuer Kreiszyklus hinzugefügt. Man verifiziert leicht, dass es sich um einen einfachen Kreis handelt, da der Stack jeden Knoten höchstens einmal enthält und aufeinanderfolgende Knoten miteinander verbunden sind. Da Kreise zweizusammenhängend sind, handelt es sich um Knoten eines Blocks. Weil bei dem Gebietszyklus erster und letzter Knoten übereinstimmen, wird zuletzt der verbleibende Kreiszyklus hinzugefügt. Die gefundenen Zyklen sind maximal, da ein Gebietszyklus nicht zwei Kreise eines Blocks enthalten kann. Deshalb berechnet Algorithmus 3.2 genau die Zerteilung eines Gebietes in Kreiszyklen.

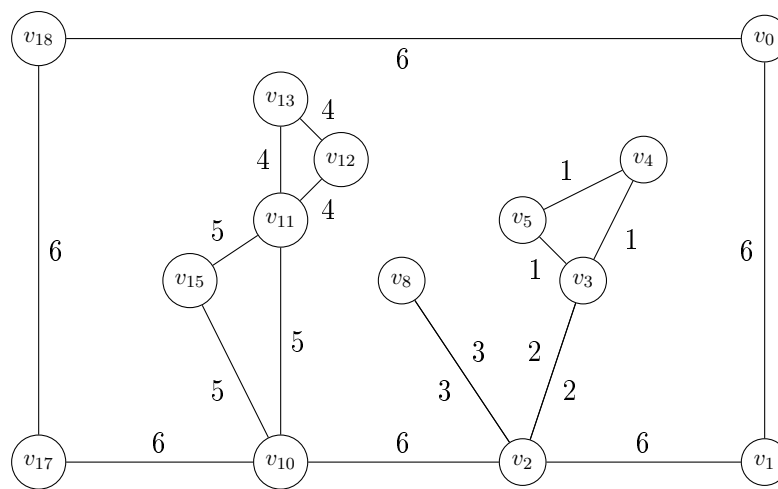


Abbildung 3.3: Beispiel zur Identifikation der sichtbaren Kreise bei nicht-zweizusammenhängenden Gebieten: Die Nummerierung der Kanten zeigt die Aufteilung des großen Gebietes in Kreiszyklen.

Abbildung 3.3 zeigt ein Gebiet, in das mehrere Blöcke eingebettet sind. Der Zyklus des Gebietes ist $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_2, v_8, v_2, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{11}, v_{15}, v_{10}, v_{17}, v_{18}, v_0)$. Zerteilt man diesen Zyklus mit Algorithmus 3.2, so erhält man sechs Kreiszyklen. Die Kanten in Abbildung 3.3 sind mit der Nummer des Zyklus der Kante markiert. Die Nummerierung gibt die Reihenfolge des Auffindens wieder. Die Zyklen sind 1 : (v_3, v_4, v_5, v_3) ; 2 : (v_2, v_3, v_2) ; 3 : (v_2, v_8, v_2) ; 4 : $(v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{11})$; 5 : $(v_{10}, v_{11}, v_{15}, v_{10})$ und 6 : $(v_0, v_1, v_2, v_{10}, v_{17}, v_{18}, v_0)$. Die Zyklen 2 und 3 sind Brücken.

3.4.3.2 Wünschenswerte Eigenschaften einzelner Kreise

Wünschenswerte Eigenschaften einzelner Kreise lassen sich an Abbildung 3.4 verdeutlichen. Ein reguläres Polygon, wie es in Abbildung (a) gezeigt ist, wird als wohlgeformt wahrgenommen. Es zeichnet sich durch uniforme Kantenlängen und uniforme Innenwinkel

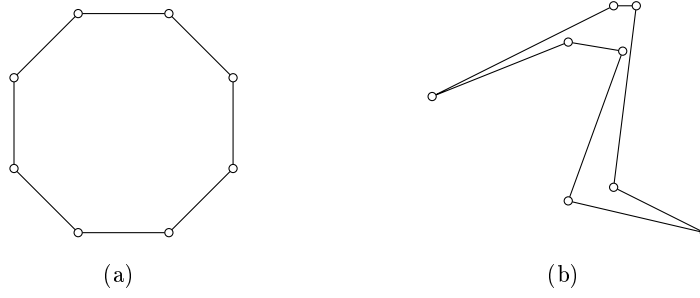


Abbildung 3.4: Gegenüberstellung eines regulären Polygons (a) mit einem konkaven, länglichen Polygon mit gleicher Knotenzahl (b).

aus. Alle Knoten und Kanten sind gut separiert. Zudem ist es konvex und rundlich. Dies äußert sich darin, dass der Fläche des Polygons ein minimaler Umfang gegenübersteht. Bei dem Polygon in Abbildung (b) sind all diese Eigenschaften verletzt. Insbesondere ist es konkav und länglich. Die Fläche steht eher in linearem statt quadratischem Verhältnis zum Umfang.

3.4.3.3 Definition der Energiekomponenten

Um derartige Formeigenschaften für die Kreise zu realisieren, werden die in Kapitel 2.3 angeführten Formmaße auf die einfachen Polygone angewendet, die entstehen, wenn man die Kreiszyklen bei einer gegebenen Zeichnung abläuft. Da sich die Form von Brücken nicht optimieren lässt, bleiben diese außen vor. Sei C die Menge der Kreise ohne Brücken. Weiterhin bezeichne $poly(c)$ das Polygon von $c \in C$ zu einer gegebenen Zeichnung und $E(c)$ die Menge der Kanten, die einem Kreis $c \in C$ zugeordnet sind. Die Formmaße der Kreise werden gemäß der Anzahl der Kanten der Kreise gewichtet.

Konvexität. Für die Konvexität definieren wir folgende Energiekomponenten:

$$CPCONVEX_{\oplus} := \bigoplus_{c \in C} [|E(c)|, PCONVEX(poly(c))] \quad (3.18)$$

$$CACONVEX_{\oplus} := \bigoplus_{c \in C} [|E(c)|, ACONVEX(poly(c))] \quad (3.19)$$

Rundheit. Für die Rundheit definieren wir folgende Energiekomponenten:

$$CROUND_{\oplus} := \bigoplus_{c \in C} [|E(c)|, PAROUND(poly(c))] \quad (3.20)$$

$$CCIRCLEFIT_{\oplus} := \bigoplus_{c \in C} [|E(c)|, CIRCLEFIT(poly(c))] \quad (3.21)$$

3.4.4 Ähnliche Kantenlängen

Ebenso ist es wünschenswert, dass alle Kanten in etwa die gleiche Länge erhalten. Eine Ideallänge wird aus Gründen der inneren Abgeschlossenheit nicht vorgegeben. Stattdessen wird gefordert, dass die Kantenlängen sich untereinander ähneln sollen.

Weiterer Spielraum ergibt sich bei der Gruppierung: Es ist möglich, ein einziges Konstrukt auf alle Kanten anzuwenden. Alternativ kann man die Kanten in Gruppen zusammenfassen und dann für jede Gruppe die Ähnlichkeit fordern. Solche Gruppen sind: Die Kanten $E(v)$ um einen Knoten $v \in V$, die Kanten $E(f)$ entlang eines Gebietes $f \in F$ oder die Kanten $E(c)$ entlang eines Kreises $c \in C$. Da jede Kante zu zwei Knoten inzident ist und bis zu zwei Gebiete begrenzt, ist anzunehmen, dass sich eine solche gruppierte Ähnlichkeit auch global auswirkt.

Für eine Kante $e = (u, v)$ bezeichne $L(e) = d(u, v)$ die euklidische Länge der Kante e . Bei gruppierten Konstrukten werden die Gewichte gemäß der Anzahl der Kanten in der Gruppe gewählt. Wir schreiben ELSIM für edge length similarity und definieren

$$\text{ELSIM}_{\approx} := \underset{e \in E}{\approx} L(e) \quad (3.22)$$

$$\text{VELSIM}_{\oplus, \approx} := \bigoplus_{v \in V} \left[|E(v)|, \underset{e \in E(v)}{\approx} L(e) \right] \quad (3.23)$$

$$\text{FELSIM}_{\oplus, \approx} := \bigoplus_{f \in F} \left[|E(f)|, \underset{e \in E(f)}{\approx} L(e) \right] \quad (3.24)$$

$$\text{CELSIM}_{\oplus, \approx} := \bigoplus_{c \in C} \left[|E(c)|, \underset{e \in E(c)}{\approx} L(e) \right] \quad (3.25)$$

Ergänzend zur gruppierten Ähnlichkeit kann eine gerechte Verteilung der Kantenlängensumme auf die Gruppen gefordert werden. Dies entspricht der Forderung, dass die durchschnittliche Kantenlänge in jeder Gruppe gleich sein soll. Am Beispiel der Kreise lässt sich diese Forderung äquivalent umformulieren: Der Umfang eines Kreises soll proportional zur Anzahl der Kanten des Kreises sein. Dabei ist zu beachten, dass diese Forderung noch keine Gleichverteilung der Kantenlängen innerhalb des Kreises impliziert. Gruppen erhalten wieder das Gewicht der darin enthaltenen Kanten. Bei der Gruppierung nach Kreisen sind nun erstmals auch die Brücken mit zu berücksichtigen. Sei also C_B die Menge der Kreise inklusive der Brücken. Wir definieren:

$$\text{VELFAIRNESS}_{\approx} := \underset{v \in V}{\approx} \left[|E(v)|, \text{AM}_{e \in E(v)} L(e) \right] \quad (3.26)$$

$$\text{FELFAIRNESS}_{\approx} := \underset{f \in F}{\approx} \left[|E(f)|, \text{AM}_{e \in E(f)} L(e) \right] \quad (3.27)$$

$$\text{CELFAIRNESS}_{\approx} := \underset{c \in C_B}{\approx} \left[|E(c)|, \text{AM}_{e \in E(c)} L(e) \right] \quad (3.28)$$

3.4.5 Separation

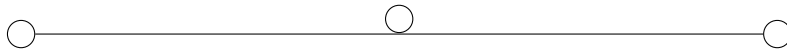


Abbildung 3.5: Schlechte Knoten/Kanten-Separation trotz guter Knoten/Knoten-Separation.

Ziel der Separation ist es, starke Annäherung zwischen Objekten der Zeichnung zu verhindern. Bei schlechter Separation wirkt die Zeichnung gedrungen. Da Knoten mit einer gewissen Ausdehnung gezeichnet werden, kann es zu Überlappungen kommen. Dies erzeugt Missverständnisse darüber, welche Knoten miteinander verbunden sind. In der Literatur werden vor allem Knoten/Knoten-Separation (im Folgenden: V/V -Separation) und Knoten/Kanten-Separation (im Folgenden: V/E -Separation) diskutiert.

Gute V/E -Separation impliziert gute V/V -Separation: Wenn sich zwei Knoten u und v zu nahe sind, liegt u auch nah an den Kanten von v . Umgekehrt gilt die Implikation nicht – Abbildung 3.5 zeigt schlechte V/E -Separation bei gegebener V/V -Separation.

V/E -Separation ist im allgemeinen Fall mit höherer Rechenzeit verbunden: Da ein Graph $\Omega(|V|^2)$ Kanten haben kann, kann der Aufwand, alle V/E -Paare zu betrachten $\Omega(|V|^3)$ betragen. Bei planaren Graphen gilt der Zusammenhang $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ und der Mehraufwand von V/E -Separation kann vernachlässigt werden.

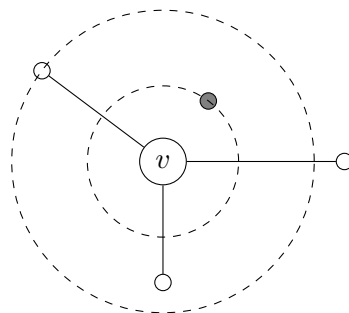


Abbildung 3.6: Beispiel zur Berechnung von $\text{VFREEDOM}(v)$: Der kleine Kreisradius entspricht $\text{FREIKREISRADIUS}(v)$, der große Kreisradius entspricht $\text{MITTLEREKANTENLÄNGE}(v)$. $\text{VFREEDOM}(v)$ ist schließlich das Verhältnis dieser Radien.

Wir definieren nun eine Energiekomponente VFREEDOM_{\oplus} , die den Anforderungen an Energiekomponenten gerecht wird und ausdrückt, wie viel Freiraum die Knoten haben. Dazu bezeichne $\text{FREIKREISRADIUS}(v)$ den Radius eines größten Kreises um die Position von v , der keine Knoten und Kanten enthält außer v und die Kanten um v . Alternativ lässt sich dieser Radius als Abstand von v zu dem nächsten Objekt charakterisieren. Dieser Radius wird nun ins Verhältnis zur durchschnittlichen Kantenlänge um v gesetzt. Da $\text{FREIKREISRADIUS}(v)$ nicht größer ist als die Länge einer kürzesten Kante um v , hat das so definierte Maß den Wertebereich $[0, 1]$. Kommt ein Objekt einem Knoten näher als seine durchschnittliche Kantenlänge, so spiegelt sich das in einem geringeren Quotienten

wider. Auch Nachbarknoten, die dem Knoten näher sind als die durchschnittliche Kantenlänge, werden wirksam bestraft. VFREEDOM_{\oplus} bündelt schließlich diese Quotienten für alle Knoten, wobei jeder Knoten mit dem Gewicht seines Grades einfließt. Abbildung 3.6 verdeutlicht diese Definition an einem Beispiel. Nachfolgend werden diese Überlegungen in Formeln zusammengefasst:

$$\text{FREIKREISRADIUS}(v) := \min \left\{ \min_{u \in V \setminus \{v\}} d(u, v), \min_{e \in E \setminus E(v)} d(e, v) \right\} \quad (3.29)$$

$$\text{MITTLEREKANTENLÄNGE}(v) := \text{AM}_{e \in E(v)} L(e) \quad (3.30)$$

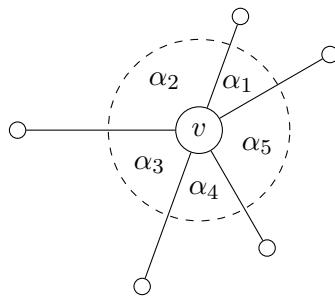
$$\text{VFREEDOM}(v) := \frac{\text{FREIKREISRADIUS}(v)}{\text{MITTLEREKANTENLÄNGE}(v)} \quad (3.31)$$

$$\text{VFREEDOM}_{\oplus} := \bigoplus_{v \in V} [|E(v)|, \text{VFREEDOM}(v)] \quad (3.32)$$

Zur Berechnung von $\text{FREIKREISRADIUS}(v)$ reicht es aus, alle Knoten $V_F(v)$ und Kanten $E_F(v)$ zu betrachten, die sich mit v einen gemeinsamen Gebietszyklus teilen. Der Knoten v und die Kanten $E(v)$ um v fließen nicht mit ein. Es gilt die folgende Gleichung:

$$\text{FREIKREISRADIUS}(v) = \min \left\{ \min_{u \in V_F(v) \setminus \{v\}} d(u, v), \min_{e \in E_F(v) \setminus E(v)} d(e, v) \right\} \quad (3.33)$$

3.4.6 Ähnliche Winkel



$$A(v) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$$

Abbildung 3.7: Winkel um einen Knoten.

Ähnliche Winkel um die Knoten des Graphen sind wünschenswert. Besonders kleine Winkel wirken störend. Zu einem Knoten v bezeichne $A(v)$ die Menge der Winkel zwischen Kanten, die in der zyklischen Reihenfolge der Kanten um v direkt benachbart sind. Diese Definition wird in Abbildung 3.7 illustriert. Wir wählen das Gewicht eines Knotens gemäß der Anzahl seiner umliegenden Kanten und definieren

$$\text{VANGLESIM}_{\oplus, \approx} := \bigoplus_{\substack{v \in V \\ \text{grad}(v) \geq 2}} \left[|E(v)|, \underset{\alpha \in A(v)}{\approx} \alpha \right] \quad (3.34)$$

3.4.7 Idealer Knotenabstand

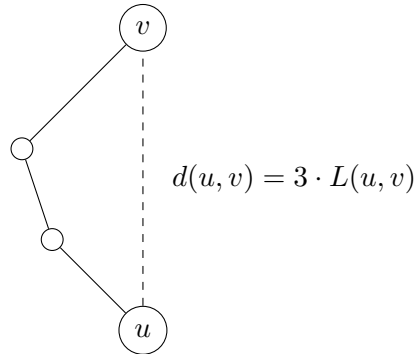


Abbildung 3.8: Verdeutlichung der Komponente $\text{IDEALDISTANCE}_{\approx}$: Die Wunschkantenlänge $L(u, v)$ eines Paares ergibt sich aus dem Quotienten von der Distanz in der Zeichnung und der Länge eines kürzesten Pfades zwischen den Knoten.

Die Energiefunktion von Kamada und Kawai [19], deren Verfahren in Kapitel 2.2.2.2 erläutert wird, bewirkt die Annäherung von Knotendistanzen an die Länge eines kürzesten Pfades zwischen den Knoten.

In diesem Kapitel wird eine Energiekomponente entwickelt, welche die Grundidee von Kamada und Kawai konserviert und gleichzeitig die zuvor definierten Anforderungen erfüllt. Im Sinne der inneren Abgeschlossenheit wird auf eine Wunschkantenlänge L verzichtet. Die Annäherung der Abstände zwischen Knotenpaaren an ihren Idealabstand wird als Ähnlichkeitsproblem formuliert und so auf den Wertebereich $[0, 1]$ abgebildet. So wird der Wert der Energiefunktion anschaulich interpretierbar und es wird möglich, die Komponente mit anderen Energiekomponenten zu verrechnen. Sei $D(u, v)$ die Länge eines kürzesten Pfades von u nach v . Wir definieren

$$\text{IDEALDISTANCE}_{\approx} := \underset{\substack{u, v \in V \\ u \neq v}}{\approx} \left[\underbrace{\frac{1}{D(u, v)}}_{g(u, v)}, \underbrace{\frac{d(u, v)}{D(u, v)}}_{L(u, v)} \right] \quad (3.35)$$

Für ein gegebenes Knotenpaar (u, v) wird also eine Wunschkantenlänge $L(u, v)$ errechnet, welche die Gleichung $L(u, v) \cdot D(u, v) = d(u, v)$ erfüllt. Abbildung 3.8 veranschaulicht dies am Beispiel eines Knotenpaares mit Abstand drei. Wenn nun tatsächlich im Sinne von Kamada und Kawai ein proportionaler Zusammenhang zwischen dem Knotenpaarabstand und der Länge eines kürzesten Pfades zwischen den Knoten besteht, nähern sich

die $L(u, v)$ -Werte aller Paare einem gemeinsamen Wert an. Also ist das Ähnlichkeitsmaß der $L(u, v)$ -Werte ein Indikator dafür, inwieweit ein gemeinsamer Proportionalitätsfaktor existiert. Dabei erhält das Knotenpaar das gleiche Gewicht $g(u, v) = 1/D(u, v)$ wie schon in der Originalfunktion, sodass Knotenpaare, die im Graphen weit entfernt sind, nur mit geringem Gewicht eingehen.

3.5 Erweiterungen für Kreuzungen und Knicke

In diesem Abschnitt wird das Verfahren um die Funktionalität erweitert, Zeichnungen mit Kreuzungen und Knicken zu adaptieren. Die Erweiterung um Kreuzungen ist besonders deshalb relevant, weil in der Praxis selbst dünne Graphen mit wenigen Kanten oft nicht planar sind. Die Erweiterung um Knicke eröffnet die Möglichkeit der Adaption von Verfahren, die Polygonlinienzeichnungen erzeugen.

Abschnitt 3.5.1 beschreibt die Erweiterung des Verfahrens um Kreuzungen.

Abschnitt 3.5.2 beschreibt die Erweiterung des Verfahrens um Knicke.

3.5.1 Kreuzungen

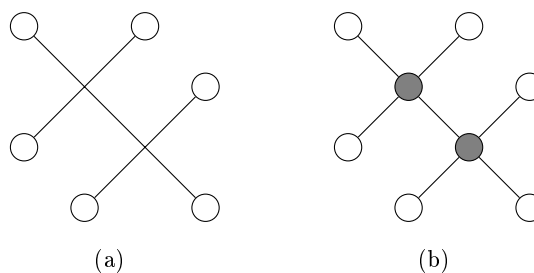


Abbildung 3.9: Planarisierung durch Einfügen von Kreuzungsknoten: Beim Öffnen einer Zeichnung mit Kreuzungen (a) werden neue Kreuzungsknoten auf die Positionen der Kreuzungen gesetzt und die Kanten an den Kreuzungsknoten unterbrochen. Die planarisierte Zeichnung (b) ist kreuzungsfrei.

Zur Adaption von Zeichnungen mit Kreuzungen erfolgt eine Planarisierung. An den Positionen der Kreuzungen werden neue Kreuzungsknoten eingefügt. Die kreuzenden Kanten werden an dem Kreuzungsknoten unterbrochen und mit dem Kreuzungsknoten verbunden. Abbildung 3.9 verdeutlicht diesen Vorgang am Beispiel einer Zeichnung mit zwei Kreuzungen. Die grundsätzliche Idee einer solchen Planarisierung geht auf Tamassia, Di Battista und Batini [26] zurück.

3.5.1.1 Auswirkungen auf Energiekomponenten

Die oben vorgestellten Energiekomponenten lassen sich unverändert auf planarisierte Graphen anwenden. So ist es gut, wenn sich die Energiekomponenten zur Bewertung von

Kreisformen aus Kapitel 3.4.3 auf die sichtbaren Kreise beziehen, die durch die Struktur des Graphen und durch die Zerteilung der Ebene durch die Kantenkreuzungen entstehen.

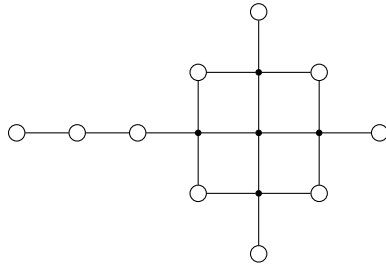


Abbildung 3.10: Kantenlängenähnlichkeit bei planarisierten Graphen: Wendet man Konstrukte für ähnliche Kantenlängen auf Graphen mit Kreuzungsknoten an, so fließt die Anzahl der Kreuzungen in die angestrebte Länge der Originalkanten mit ein.

Eine bemerkenswerte Änderung der Wirkungsweise ergibt sich bei den Konstrukten für gleichmäßige Kantenlängen aus Kapitel 3.4.4. Eine Originalkante, die k mal gekreuzt wird, zerfällt in $k + 1$ Kreuzungskanten. Wenn nun ein Konstrukt die Annäherungen aller Kantenlängen bewirkt, fließt für die Länge der Originalkante der Faktor $k + 1$ mit ein. Abbildung 3.10 verdeutlicht dies: Hier haben alle Kreuzungssegmente die gleiche Länge und die besagte Wirkung auf die Originalkantenlänge wird deutlich.

Dieser Effekt ist ambivalent einzuordnen. Einerseits kann es zu Verwirrungen führen, wenn Abstände zu Kreuzungen ebenso groß sind wie Abstände zu echten Knoten. Dies suggeriert möglicherweise die Existenz eines Knotens auf der Kreuzung. Der größere Abstand zwischen Start- und Zielknoten macht es noch schwieriger, die Kante zu verfolgen. Andererseits ist es unrealistisch, eine mehrfach gekreuzte Kante mit unveränderter Kantenlänge zeichnen zu wollen und man kann argumentieren, dass die durch die Kreuzung entstehende Verwirrung wohl eher der Kreuzung an sich anzulasten ist. Die Verlängerung der Kanten durch die Kreuzungen ist also ein Vorteil gegenüber anderen Verfahren, die Kantenkreuzungen nicht berücksichtigen und die Kantenlängen unverändert beibehalten.

3.5.1.2 Begradigung um Kreuzungsknoten

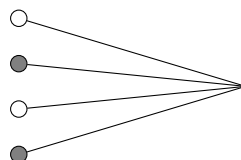


Abbildung 3.11: Ohne Begradigung sind unübersichtliche Knicke in den Kreuzungsknoten nicht ausgeschlossen: Ohne die farbliche Markierung ist es bei kurzem Hinschauen nicht möglich, die verbundenen Knotenpaare zu identifizieren.

Eine neue Herausforderung stellt die Begradigung der Winkel um Kreuzungsknoten dar. Die eigene Position des Kreuzungsknotens bedeutet zunächst einmal einen Knick für die zwei beteiligten Originalkanten. Nur wenn die Kantenpaare, die zur selben Originalkante gehören, in genau entgegengesetzter Richtung von dem Kreuzungsknoten ausstreben, ist die Geradlinigkeit der Zeichnung gewahrt. Andernfalls kann die Nachvollziehbarkeit der Zeichnung gefährdet sein, wie Abbildung 3.11 zeigt.

Begradigung in anderen Verfahren. Bekannte geradlinig planare Zeichenverfahren setzen keine Form der Begradigung um. Hier kann lediglich die zyklische Reihenfolge der Kanten um Kreuzungsknoten vorgegeben werden. Dies führt zu unlesbaren Zeichnungen. Orthogonale Verfahren lösen das Problem durch ihre Zeichenkonventionen. Hier können Kanten nur horizontal oder vertikal verlaufen. Da zudem noch die Einbettung des Kreuzungsknotens vorgegeben werden kann, ist die Begradigung gewährleistet: Eine Originalkante verläuft horizontal, die andere vertikal. Da orthogonale Verfahren Knicke verwenden, bedeutet dies aber unmittelbar die Aufgabe der Geradlinigkeit.

In dieser Arbeit wird die Begradigung durch zwei Ansätze erwirkt: *Harte Begradigung* durch die Variation und *weiche Begradigung* durch die Energiefunktion.

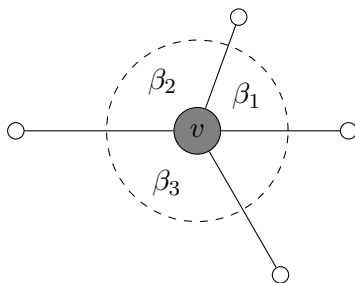


Abbildung 3.12: Harte Begradigung von Kreuzungsknoten: Beim Verschieben der Endknoten wandern die Kreuzungsknoten mit.

Harte Begradigung durch die Variation. Bei der harten Begradigung wird die Position von Kreuzungsknoten nicht als frei verschiebbar angesehen. Stattdessen wird der Knoten stets auf die Position gesetzt, an der sich die Originalkanten kreuzen würden (Vergleich Abbildung 3.12). Wenn also v_k ein Kreuzungsknoten ist, der durch eine Kantenkreuzung der Originalkanten (a_1, a_2) und (b_1, b_2) entstanden ist, so wird v_k verschoben, sobald a_1, a_2, b_1 oder b_2 bewegt werden. Kreuzen sich die Kanten nach der Verschiebung nicht mehr, gilt die Zeichnung als ungültig. Die Anpassung der Positionen von Kreuzungsknoten bewirkt einen Ketteneffekt bei der Auswertung der Gültigkeit und der Energiekomponenten. Eine Verschiebung kann nur dann als gültig betrachtet werden, wenn auch die Positionen der Kreuzungsknoten angepasst werden können, ohne etwa neue Kreuzungen zu generieren.

Es ist leicht einzusehen, dass Variationsoperatoren, die die Begradigung der Kreuzungsknoten explizit sicherstellen, das Verfahren mit der Invarianten stets begradigter Kreuzungsknoten ausstatten. Der erfolgreiche Einsatz der harten Begradigung setzt aber auch eine initiale Zeichnung voraus, bei der die Kreuzungen begradigt sind.

Weiche Begradigung durch die Energiefunktion. Die weiche Begradigung begegnet dem Problem durch eine zusätzliche Komponente in der Energiefunktion. Die Position des Kreuzungsknotens ist frei verschiebbar. Der Knoten wird bei der Verschiebung einzelner Knoten mit berücksichtigt. So wird die Begradigung zwar nicht exakt erreicht, weil andere Optimierungsziele dem entgegenstehen. Dennoch kann der Knickwinkel verkleinert werden, sodass der Kantenverlauf nachvollziehbar bleibt.



$$\alpha_1(v) = \beta_1 + \beta_2 \text{ und } \alpha_2(v) = \beta_2 + \beta_3$$

Abbildung 3.13: Winkel zur weichen Begradigung um Kreuzungsknoten.

Sei V_k die Menge der Kreuzungsknoten. Für einen Knoten $v \in V_k$ seien $\alpha_1(v)$ und $\alpha_2(v)$ die Winkel um den Knoten v zwischen den Kreuzungskanten, die zu gleichen Originalkanten gehören. Abbildung 3.13 verdeutlicht diese Definition. Dann definieren wir

$$\text{STRAIGHTCROSS}_{\oplus} := \bigoplus_{\substack{v \in V_k \\ i \in \{1,2\}}} \left[1, \frac{\min\{\alpha_i(v), 2\pi - \alpha_i(v)\}}{\pi} \right] \quad (3.36)$$

Die Definitionen von $\alpha_1(v)$ und $\alpha_2(v)$ sind nicht eindeutig. Alle denkbaren Kombinationen führen aber zur gleichen Definition von $\text{STRAIGHTCROSS}_{\oplus}$.

3.5.2 Knicke

Eine weitere Möglichkeit, das Verfahren zu generalisieren, ist die Erlaubnis von Kantenknicken. Diese Erweiterung erhält besonders vor dem Hintergrund harter Kreuzungsbegradigung ihren Reiz: Da orthogonale Verfahren Zeichnungen mit begradigten Kreuzungsknoten liefern, die allerdings Knicke enthalten, ist das Verfahren nach der Erweiterung um Knicke in der Lage, diese Zeichnungen zu adaptieren und bezüglich anderer Kriterien zu optimieren.

3.5.2.1 Auswirkungen auf die Variation

Genau wie normale Knoten und Kreuzungsknoten – im Fall von weicher Begradigung – können auch Knicke verschoben werden. Dementsprechend werden sie bei der Verschiebung einzelner Knoten als Knickknoten mit berücksichtigt.

Bei harter Begradigung von Kreuzungsknoten ist zu beachten, dass die Positionen der Kreuzungsknoten nun möglicherweise von den Positionen von Knicken abhängen und nicht unbedingt von den Positionen normaler Knoten. Für die Ausrichtung der Kreuzungsknoten sind diejenigen normalen Knoten oder Knicke heranzuziehen, die von dem Kreuzungsknoten aus als erste erreicht werden, wenn man Kreuzungen überspringt.

3.5.2.2 Anpassung der Energiekomponenten

Die Auswirkungen von Knicken auf Energiekomponenten gestalten sich höchst unterschiedlich. Die nachfolgende Aufzählung beschreibt Neudefinitionen der Energiekomponenten bei Zeichnungen mit Knicken.

- Die Energiekomponenten zu wohlgeformten Kreisen aus Abschnitt 3.4.3 basieren auf den Polygonen der Kreiszyklen. Hier ist es zweckmäßig, dass die Knicke als neue Eckpunkte der Polygone berücksichtigt werden.
- Die Kantenlängen geknickter Kanten sind im Zusammenhang der ähnlichen Kantenlängen aus Abschnitt 3.4.4 als Summe der Knicksegmentlängen umzudefinieren.
- Bei der Definition der Separationskomponente $V_{\text{FREEDOM}_{\oplus}}$ in Abschnitt 3.4.5 werden zum einen Abstände verwendet und zum anderen Kantenlängen.

Der minimale Abstand zu geknickten Kanten lässt sich konsistent umdefinieren als Abstand zu dem Knicksegment mit der geringsten Distanz.

Für die Kantenlängen ist es zweckmäßig, die Summe der Knicksegmentlängen zu verwenden.

Um auch Knicke gut zu separieren, werden Knicke wie Knoten behandelt und in dem Lagemaß von $V_{\text{FREEDOM}_{\oplus}}$ mit aggregiert.

- Die Winkel aus Abschnitt 3.4.6 werden angepasst, sodass die Winkel zwischen den Knicksegmenten verwendet werden, die direkt an den Knoten liegen.

Die Winkel um Knickknoten sollen ebenfalls ähnlich sein. Darum werden die Knickknoten in die Knotenmenge aus der Definition von $V_{\text{ANGLESIM}_{\oplus, \approx}}$ mit eingeschlossen.

Es ist auch wünschenswert, die Ähnlichkeit der Winkel um die Knicke unabhängig von anderen Winkeln angleichen zu können. Sei V_B die Menge der Knickknoten. Zu einem Knickknoten v bezeichne $A(v)$ die Menge der beiden Winkel zwischen

den Knicksegmenten, die von dem Knickknoten auslaufen. Wir definieren analog zu $\text{VANGLESIM}_{\oplus, \approx}$ eine Winkelähnlichkeitskomponente $\text{BENDANGLESIM}_{\oplus, \approx}$ für Knickknoten:

$$\text{BENDANGLESIM}_{\oplus, \approx} := \bigoplus_{v \in V_B} \left[1, \underset{\alpha \in A(v)}{\approx} \alpha \right] \quad (3.37)$$

- Bei der Komponente $\text{IDEALDISTANCE}_{\approx}$ aus Abschnitt 3.4.7 werden Knicke wie Knoten berücksichtigt. Die Länge der Originalkanten – eins – wird in gleichen Teilen auf die Knicksegmente aufgeteilt. Sei $e = (v_0, v_{k+1})$ eine Kante mit k Knicken $[v_1, \dots, v_k]$, dann ist für alle $0 \leq i, j \leq k+1$ die Länge eines kürzesten Pfades von v_i nach v_j durch $|j - i|/(k+1)$ gegeben.

3.5.2.3 Dynamische Knickentfernung

Im Zusammenhang mit einer Erweiterung um Knicke ist der dynamische Aspekt besonders interessant. Die Entfernung von Knicken wird in diesem Abschnitt als Variation eingeführt und in Abschnitt 5.3.3 exemplarisch evaluiert.

Modifizierte Auswahl der Variationsart. Sei V die Menge aller verschiebbaren Knoten inklusive Knicke. Sei B die Menge aller Blöcke. Sei V_B die Menge aller Knicke. Beim Heranziehen von Knickentfernung als Variation wird die Auswahl der Variationsart wie folgt modifiziert: Mit Wahrscheinlichkeit $|V_B|/(|V_B| + 5 \cdot (|V| + |B| - 1))$ wähle Knickentfernung als Variation. Andernfalls wähle wie bisher.

Knickentfernung. Zur Knickentfernung wähle uniform zufällig einen Knick $v \in V_B$. Platziere den Knick auf eine zufällige Position des Geradensegmentes, das die beiden Nachbarknoten – oder Nachbarknicke – des Knicks verbindet. Wenn die Verschiebung gültig ist, ist der Knick begradigt und wird unabhängig von dem neuen Energiewert entfernt. Andernfalls wird die Verschiebung rückgängig gemacht.

Kapitel 4

Realisierung

Dieses Kapitel thematisiert die Realisierung des Planaren Energie-Optimierers. Die Implementierung, die im Rahmen dieser Diplomarbeit entstanden ist, verwendet die Programmiersprache C++.

Abschnitt 4.1 nennt Softwarebibliotheken, die bei der Implementierung genutzt werden.

Abschnitt 4.2 thematisiert die effiziente Aktualisierung von Energiewerten, da dies Kernpunkt einer effizienten Implementierung ist.

Abschnitt 4.3 geht auf Implementierungsdetails zum Verfahren von Bertault ein.

4.1 Verwendete Softwarebibliotheken

Im Rahmen der Implementierung werden folgende Softwarebibliotheken verwendet:

- **Open Graph Drawing Framework (OGDF)** [3]: Das Open Graph Drawing Framework (OGDF) ist eine freie Softwarebibliothek zum Zeichnen von Graphen. Es liefert Datenstrukturen zur Repräsentation, Traversierung und Manipulation von Graphen und ihren Zeichnungen. Desweiteren ist eine Vielzahl von Verfahren zum Zeichnen von Graphen verfügbar. Geradlinig planare Zeichnungen, die in Kapitel 5 als initiale Zeichnungen verwendet werden, werden durch die Klassen *PlanarStraightLayout* und *PlanarDrawLayout* erzeugt.
- **Computational Geometry Algorithms Library (CGAL)** [1]: Die Computational Geometry Algorithms Library (CGAL) liefert Datenstrukturen und Algorithmen für geometrische Berechnungen. Die Implementierung verwendet die Konzepte zur Repräsentation primitiver geometrischer Objekte. Zudem werden fortgeschrittene Algorithmen adaptiert: Die Methode *ch_graham_andrew* realisiert die Berechnung der konvexen Hülle von n Punkten in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$. Die Klasse *Min_circle_2* wird zur Berechnung von Passkreisen herangezogen, wobei die erwartete Laufzeit einer Berechnung mit n Punkten $\mathcal{O}(n)$ ist. Die Methode *do_curves_intersect* testet in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ eine Liste von n Geraden auf die Existenz von Kreuzungen.

- **Simple and Fast Multimedia Library (SFML)** [4]: Die Simple and Fast Multimedia Library (SFML) wird zur Entwicklung einer graphischen Benutzeroberfläche herangezogen. SFML unterstützt das Erzeugen von Fenstern und die graphische Ausgabe mit OpenGL. Auch die Verarbeitung von Eingabeereignissen wird durch SFML unterstützt.

4.2 Effiziente Aktualisierung von Energiewerten

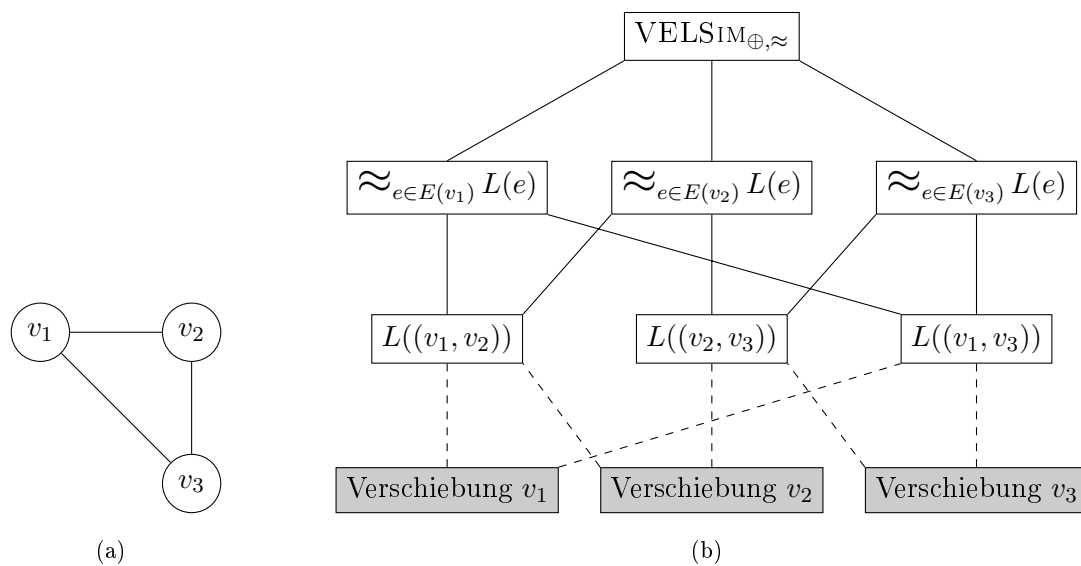


Abbildung 4.1: Eine Zeichnung (a) und der zugehörige Energiebaum zur Komponente $\text{VELSIM}_{\oplus, \approx}$ (b). Unter dem Energiebaum sind grau hinterlegt Variationsereignisse aufgeführt. Beim Eintreten eines Variationsereignisses werden die Werte in Knoten des Energiebaumes bottom-up aktualisiert.

Ein wesentlicher Bestandteil einer effizienten Implementierung von PEO ist die effiziente Aktualisierung von Energiewerten. Dabei ist es zielführend, die Energiefunktion nicht bei jeder Änderung vollständig auszuwerten, sondern geänderte Teile der Energiefunktion zu aktualisieren.

Energiebaum. Dazu wird die Energiefunktion in einen Energiebaum zerlegt. Abbildung 4.1 zeigt eine Zeichnung (a) und den zugehörigen Energiebaum zur Komponente $\text{VELSIM}_{\oplus, \approx}$ (b). Andere Energiekomponenten können analog zerlegt werden. Jeder Knoten des Energiebaumes berechnet einen Teil der Energiefunktion. Zu einer gegebenen Zeichnung ist in den Knoten der aktuelle Wert der Teilfunktion gespeichert. Unter dem Energiebaum sind grau hinterlegt Variationsereignisse aufgeführt. Diese sind mit Blättern des Energiebaumes verbunden, deren Wert bei Eintreten des Variationsereignisses neu berech-

net wird. In den darüber liegenden Schichten des Energiebaumes werden Teilfunktionen durch Lagemaße und Ähnlichkeitsmaße aggregiert.

Aktualisierung. Die Aktualisierung der Energiewerte erfolgt bottom-up in zwei Phasen:

- **Markierung:** Ein DFS-Durchlauf traversiert den Baum ausgehend von dem Variationsereignis in Richtung höherer Schichten. Jeder Knoten, der auf diese Weise erreicht wird, speichert seinen aktuellen Wert als alten Wert und die Anzahl der eingehenden Kanten in der Traversierung.
- **Aktualisierung:** In einem weiteren Durchlauf werden die Werte der Blätter des Energiebaumes, die mit dem Variationsereignis verbunden sind, neu berechnet. Aktualisierte Knoten melden ihren alten und neuen Wert an ihre Elterknoten. Im Elterknoten wird der alte Wert gelöscht und der neue Wert hinzugefügt. Der Zähler der eingehenden Kanten wird um eins verringert. Sobald der Zähler den Wert null erreicht sind alle Änderungen in dem Aggregationsknoten eingetroffen. Dieser meldet wiederum seinen alten und neuen Wert an seine Elterknoten, sodass sich die Aktualisierung rekursiv fortsetzt.

Auf diese Weise werden die Werte der Knoten in topologischer Reihenfolge aktualisiert und nur diejenigen Knoten betrachtet, deren Wert sich ändert. Zuletzt wird der Wurzelknoten des Energiebaumes – und damit der Wert der Energiefunktion – aktualisiert.

Statistik-Skipliste. Zur Speicherung der Werte in den Aggregationsknoten wird eine Skipliste nach Pugh [22] verwendet. Diese ist so modifiziert, dass sie in den Zeigern auf jeder Ebene statistische Daten über die übersprungenen Elemente führt. Dabei wird die Zerlegungseigenschaft von statistischen Maßen genutzt: Maßzahlen einer Menge $M = M_1 \cup M_2$ können aus Maßzahlen zu M_1 und M_2 zusammengesetzt werden, wenn die Werte der Elemente in M_1 kleiner als die Werte der Elemente in M_2 sind. So können beim Einfügen und Löschen von Elementen die veränderten Statistiken neu zusammengesetzt werden. Beide Operationen sind bei n Elementen weiterhin in erwarteter Zeit $\mathcal{O}(\log n)$ möglich. Ein zusätzlicher Zeiger, der alle Elemente überspannt, enthält zu jedem Zeitpunkt die Statistik zu der gespeicherten Datenmenge und den Wert des Aggregationsknotens.

Laufzeitanalyse. Nachfolgend wird der Aktualisierungsaufwand der verschiedenen Energiekomponenten analysiert. In einer *Runde* sind $|V|$ Iterationen zusammengefasst, in denen jeder Knoten einmal verschoben wird.

- **Kombinatorische Einbettung:** Zur Einhaltung der kombinatorischen Einbettung wird für jeden Knoten $v \in V$ nachgehalten, ob die Einbettung um v unverändert ist.

Eine Aktualisierung dieses Prädikates erfolgt bei Verschiebung von v und den Nachbarn von v . Bei der Neuberechnung werden die Kanten um v sortiert und die aktuelle Einbettung mit der ursprünglichen Einbettung verglichen. Die Laufzeit beträgt $\mathcal{O}(|E(v)| \cdot \log |E(v)|)$. In einer Runde erfolgen $|E(v)| + 1$ derartige Aktualisierungen. Der Gesamtaufwand der Runde beträgt $\mathcal{O}(\sum_{v \in V} |E(v)|^2 \cdot \log |E(v)|)$.

Für eine gröbere Abschätzung ohne Summe überlegt man sich, dass bei jeder Verschiebung höchstens jedes Prädikat aktualisiert wird, und erhält die Laufzeitschranke $\mathcal{O}(|V| \cdot |E| \cdot \log |E|)$.

- **Gleichbleibendes Außengebiet:** Sei f_0 das Außengebiet. Die Invarianz des Außengebietes lässt sich an der Orientierung von f_0 ablesen. Wenn f_0 außen liegt, ist der orientierte Flächeninhalt negativ. Die orientierte Fläche kann nach Gleichung 2.12 ohne Betragsbildung als Summe von Flächenanteilen einzelner Kanten berechnet werden. In einer Runde werden alle Kanten $E(f_0)$ des Außengebietes zweimal aktualisiert. Der Gesamtaufwand einer Runde beträgt $\mathcal{O}(|E(f_0)| \cdot \log |E(f_0)|)$.
- **Planarität:** Zu jedem Gebiet $f \in F$ wird nachgehalten, ob die Kanten von f untereinander kreuzungsfrei sind. Dies ist bei fixierter Einbettung äquivalent zur Planarität der gesamten Zeichnung. Für ein Gebiet $f \in F$ wird das Prädikat bei der Verschiebung eines Knotens von f aktualisiert. Es wird ein Sweeplinealgorithmus der Bibliothek CGAL [1] mit Laufzeit $\mathcal{O}(|E(f)| \cdot \log |E(f)|)$ verwendet. In einer Runde erfolgen $|V(f)|$ derartige Aktualisierungen. Die Gesamtlaufzeit beträgt $\mathcal{O}(\sum_{f \in F} |V(f)| \cdot |E(f)| \cdot \log |E(f)|)$.

Für eine gröbere Abschätzung ohne Summe überlegt man sich, dass bei jeder Verschiebung höchstens jedes Prädikat aktualisiert wird, und erhält die Laufzeitschranke $\mathcal{O}(|V| \cdot |E| \cdot \log |E|)$.

Je nach Topologie des Graphen besteht ein unterschiedliches Maß an Lokalität. Bäume teilen die Ebene nicht in Gebiete. Der Kreuzungstest wird bei jeder Verschiebung durchgeführt und die Laufzeit ist $\Theta(|V| \cdot |E| \cdot \log |E|)$. Bei triangulierten Graphen sind die meisten Gebiete Dreiecke, für die nur konstanter Aufwand anfällt. Mit Berücksichtigung des Außengebietes f_0 ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(|F| + |V(f_0)| \cdot |E(f_0)| \cdot \log |E(f_0)|)$.

- **CROUND $_{\oplus}$:** Zur Aktualisierung von CROUND $_{\oplus}$ werden Umfang und Fläche der Kreise aktualisiert. Umfang und Fläche können gemäß der Formeln 2.11 und 2.12 als Summen aufgefasst und in Beiträge der Kanten zerlegt werden. In einer Runde wird jede Kante zweimal in höchstens zwei Kreisen aktualisiert. Die Gesamtlaufzeit beträgt $\mathcal{O}(|E| \cdot \log |E|)$.

- **CPCONVEX_⊕, CACONVEX_⊕**: Für jeden Kreis $c \in C$ wird die konvexe Hülle von c bei der Verschiebung von Knoten von c neu berechnet. Hierzu wird ein Algorithmus der Bibliothek CGAL [1] mit Laufzeit $\mathcal{O}(|E(c)| \cdot \log |E(c)|)$ verwendet. In jeder Runde erfolgen $|E(c)|$ Neuberechnungen. Der neue Wert wird in einem Lagemaß mit $|C|$ Elementen aktualisiert. Dies führt zu einer Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(\sum_{c \in C} |E(c)| \cdot (|E(c)| \cdot \log |E(c)| + \log |C|))$.
- **CCIRCLEFIT_⊕**: Für jeden Kreis $c \in C$ wird der Passkreis von c bei der Verschiebung von Knoten von c neu berechnet. Hierzu wird ein Algorithmus der Bibliothek CGAL [1] herangezogen. Die Berechnung von Passkreisen erfolgt in erwarteter Zeit $\mathcal{O}(|E(c)|)$. In einer Runde wird der Passkreis $|E(c)|$ mal neu berechnet und in einem Lagemaß mit $|C|$ Elementen aktualisiert. Die erwartete Laufzeit einer Runde ist damit $\mathcal{O}(\sum_{c \in C} |E(c)| \cdot (|E(c)| + \log |C|))$.
- **ELSIM_≈**: Alle Kantenlängen werden in einem Ähnlichkeitsmaß zusammengeführt. In einer Runde wird jede Kantenlänge zweimal aktualisiert. Der Gesamtaufwand beträgt $\mathcal{O}(|E| \cdot \log |E|)$.
- **VELSIM_{⊕, ≈}, VELFAIRNESS_≈, FELSIM_{⊕, ≈}, FELFAIRNESS_≈, CELSIM_{⊕, ≈}, CELFAIRNESS_≈**: Jede Kante gehört höchstens zwei Gruppen an, die jeweils aus höchstens $|E|$ Elementen bestehen. Es gibt $\mathcal{O}(|E|)$ Gruppen und in einer Runde wird jede Kantenlänge zweimal aktualisiert. Der Gesamtaufwand einer Runde beträgt $\mathcal{O}(|E| \cdot \log |E|)$.
- **VFREEDOM_⊕**: Die Aktualisierung von VFREEDOM_⊕ zerfällt konzeptionell in zwei Bestandteile:
 - Die durchschnittliche Kantenlänge um die Knoten wird aktualisiert. Der Aufwand ist analog zur Komponente VELFAIRNESS_≈ und beträgt $\mathcal{O}(|E| \cdot \log |V|)$.
 - Für jeden Knoten $v \in V$ wird FREIKREISRADIUS(v) aktualisiert. Dazu wird Gleichung 3.33 verwendet. In einem MIN-Aggregationsknoten werden Distanzen von v zu Knoten $V_F(v)$ und Kanten $E_F(v)$ geführt, die sich einen Gebietszyklus mit v teilen. In einer Runde werden Knoten/Knoten-Distanzen zweimal und Knoten/Kanten-Distanzen dreimal aktualisiert. Jede dieser Aktualisierungen kann eine Veränderung des Minimums bewirken, das dann in einem Lagemaß mit $|V|$ Elementen aktualisiert wird. Sei $O_F(v) := V_F(v) \cup E_F(v)$, dann ist der Gesamtaufwand einer Runde $\mathcal{O}(\sum_{v \in V} |O_F(v)| \cdot (\log |O_F(v)| + \log |V|))$.

Für eine gröbere Abschätzung ohne Summe überlegt man sich, dass höchstens $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$ Distanzen betrachtet werden. Jede Distanz kann in Zeit $\mathcal{O}(\log |E|)$ aktualisiert werden und wird pro Runde $\mathcal{O}(1)$ mal aktualisiert. Der Gesamtaufwand beträgt $\mathcal{O}(|V| \cdot |E| \cdot \log |E|)$.

- **VANGLESIM_{⊕,≈}**, **BENDANGLESIM_{⊕,≈}**, **STRAIGHTCROSS_⊕**: Die Blätter des Energiebaumes sind höchstens $2 \cdot |E|$ Winkel zwischen Kanten, die in der zyklischen Reihenfolge um einen Knoten benachbart sind. Alle Aggregationsknoten haben höchstens $|V|$ Elemente. In einer Runde wird jeder Winkel dreimal bei der Verschiebung der Winkelknoten aktualisiert. Der Gesamtaufwand der Runde ist $\mathcal{O}(|E| \cdot \log |V|)$.
- **IDEALDISTANCE_≈**: Es werden Funktionen der Distanzen von Knotenpaaren in einem Ähnlichkeitsmaß mit $\mathcal{O}(|V|^2)$ Elementen gesammelt. In einer Runde ändert sich jede Distanz zweimal. Der Gesamtaufwand ist $\mathcal{O}(|V|^2 \cdot \log(|V|^2)) = \mathcal{O}(|V|^2 \cdot \log |V|)$.

4.3 Implementierung des Verfahrens von Bertault

Das Verfahren von Bertault [6] ist ebenfalls neu implementiert. Die Implementierung folgt den Definitionen in der Veröffentlichung. Jedoch werden Kräfte mit dem Faktor $1/100$ skaliert, da es sonst zu starker Übersteuerung kommt. Als Wunschkantenlänge wird die durchschnittliche Kantenlänge der initialen Zeichnung gewählt. Auch der Abstand, ab dem es zu abstoßenden Kräften zwischen Knoten und Kanten kommt, wird auf diese Kantenlänge festgesetzt.

Kapitel 5

Experimentelle Evaluation

In Kapitel 3 ist der Planare Energie-Optimierer (PEO) mit verschiedenen Modulen vorgestellt worden. In diesem Kapitel wird das Verfahren detailliert ausgewertet.

Abschnitt 5.1 beschäftigt sich mit der Evaluation einzelner Energiekomponenten. Dabei steht die Frage im Vordergrund, ob die Komponenten geeignet sind, Ästhetik zu modellieren und im Rahmen einer Optimierung zu verbessern. Außerdem wird beleuchtet, welche Ästhetikkriterien eine Konfiguration nicht erfüllen kann. Auch die Rolle von Lagemaßen und Ähnlichkeitsmaßen wird dabei beleuchtet.

Abschnitt 5.2 evaluiert komplexe Konfigurationen, die den Anspruch einer vollständigen Ästhetikfunktion haben. Die Konfigurationen werden auf verschiedenen Graphen evaluiert und auch mit dem Verfahren von Bertault [6] verglichen.

In Abschnitt 5.3 werden schließlich die Erweiterungen um Kreuzungen und Knicke evaluiert, die in Kapitel 3.5 vorgestellt worden sind.

5.1 Einzelne Komponenten

Ziel dieses Kapitels ist es, die Funktionsfähigkeit puristischer Algorithmenvarianten zu evaluieren. Methodisch wird dabei ein Fallbeispielansatz gewählt. Dabei werden verschiedene Algorithmenvarianten mehrfach zur Optimierung einzelner Eingabebezeichnungen herangezogen. Es wird beobachtet, inwieweit die zuvor definierten Energiekomponenten tatsächlich Ästhetik modellieren. Hier ermöglichen Fallbeispiele interessante Einsichten: Besonders schlecht gezeichnete Stellen geben Hinweise, welche Ästhetikanforderungen eine gegebene Konfiguration nicht erfüllt. Daraus entstehen auf natürliche Weise Ideen für neue Konfigurationen. Manchmal zeigt sich, dass ein schlechter Energiewert auf unerwünschte Weise kompensiert werden kann. Solche unerwünschten Maxima schärfen das Verständnis für die Funktionsweise von Energiekomponenten und sensibilisieren dafür, welche Nebeneffekte durch andere Energiekomponenten verhindert werden müssen, um ein gutes Gesamter-

gebnis zu erhalten. Ziel dieses Kapitels ist es, brauchbare Algorithmenvarianten für die detaillierte Evaluation und den Vergleich mit dem Verfahren von Bertault [6] zu ermitteln.

In diesem Abschnitt wird nur die Verschiebung von Knoten als Variation eingesetzt. Kommt die Blocktransformation hinzu, so ist dies explizit erwähnt.

Übersicht und Zusammenfassung. Abschnitt 5.1.1 beschreibt Experimente zu Energiekomponenten, die Formmaße adaptieren. Ein guter Energiewert kann oft durch die Verwendung weniger Knoten erzielt werden. Bei der Optimierung der Konvexität ergeben sich unerwünschte Nebeneffekte: Bei CPCONVEX_{\oplus} bilden sich Schlitzte aus. Bei CACONVEX_{\oplus} werden nicht konvexe Stellen plattgedrückt statt entfaltet. Die Optimierung der Komponente CROUND_{\oplus} hat eine entfaltende Wirkung und wirkt in Richtung rundlicher Gebiete. Die Komponente $\text{CCIRCLEFIT}_{\oplus}$ führt zu schlechter Separation und erweist sich als ungeeignet.

Abschnitt 5.1.2 beschreibt Experimente zu den Komponenten ELSIM_{\approx} und $\text{VELSIM}_{\oplus, \approx}$. Es zeigt sich, dass MQ als Ähnlichkeitsmaß ungeeignet ist. Das Ähnlichkeitsmaß MD erzielt jedoch gute Ergebnisse. Es wird gezeigt, dass gruppierte Kantenlängenähnlichkeit sich nicht immer global auswirkt.

Abschnitt 5.1.3 beschreibt Experimente zur Komponente VFREEDOM_{\oplus} . Es wird die Ähnlichkeit zur Komponente $\text{VELSIM}_{\oplus, \text{MIN}/\text{AM}}$ aufgezeigt. Das Lagemaß GM erzielt gute Ergebnisse. Es zeigt sich, dass die Komponente gute Separation der Knoten bewirkt. Für die Verwendung als Energiefunktion fehlt jedoch eine entfaltende Wirkung.

Abschnitt 5.1.4 beschreibt Experimente zur Komponente $\text{VANGLESIM}_{\oplus, \approx}$. Konfigurationen, die im Wesentlichen auf Winkelähnlichkeit basieren, haben eine Tendenz, in lokalen Optima steckenzubleiben. Die Blocktransformation schafft Abhilfe.

Abschnitt 5.1.5 untersucht die Energiekomponente $\text{IDEALDISTANCE}_{\approx}$. Der Erfolg der Komponente ist wesentlich von der Einbettung abhängig. Bei fixierter Einbettung muss die Komponente um ein Konstrukt zur Separation ergänzt werden.

5.1.1 Wohlgeformte Kreise

In Abschnitt 3.4.3 sind verschiedene Möglichkeiten diskutiert worden, die Form der sichtbaren Kreise zu optimieren. Da diese Formmaße keine Aussagen zu Brücken oder verschachtelten Strukturen liefern, können sie alleinstehend nur an zweizusammenhängenden Graphen evaluiert werden.

Abschnitt 5.1.1.1 evaluiert die Energiekomponenten zur Optimierung der Konvexität.

Abschnitt 5.1.1.2 evaluiert die Energiekomponenten zur Optimierung der Rundheit.

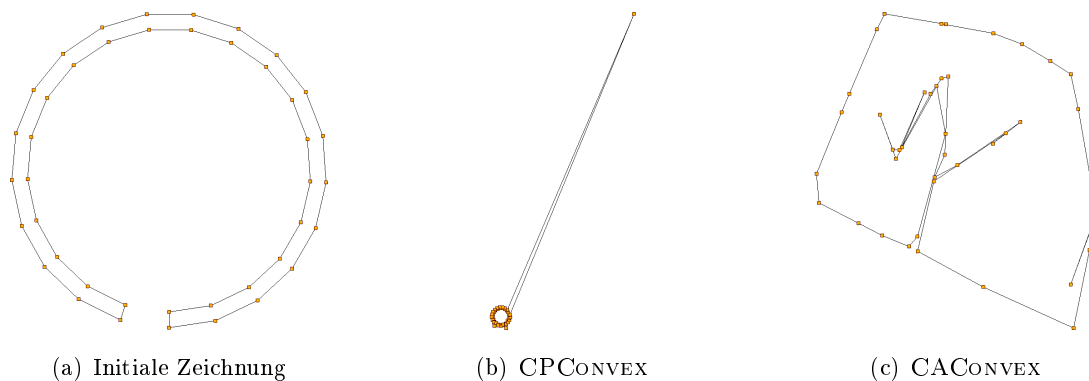


Abbildung 5.1: Degeneriertes Verhalten bei alleiniger Anwendung von Konvexitätsmaßen: Aus der ursprünglichen Zeichnung (a) entsteht der Schlitz in (b) wegen hohem CPCONVEX-Wert. Abbildung (c) zeigt das Zusammendrücken konkaver Stellen durch CACONVEX.

5.1.1.1 Konvexität

Effekte, die entstehen, wenn Konvexität das bestimmende Maß der Optimierung ist, lassen sich am Beispiel der Zeichnung in 5.1(a) aufzeigen. Wenn man ein solche Zeichnung, die im Grunde ein einziger Kreiszyklus ist, bezüglich der Konvexität optimiert, wünscht man sich, einen Kreis zu erhalten. Abbildung 5.1(b) zeigt die Optimierung dieser Zeichnung durch CPCONVEX. Mit einem Energiewert von 0,922 wird die Konvexität schnell hergestellt, indem eine extreme Knotenverschiebung die Zeichnung in einen Schlitz umwandelt. Im weiteren Verlauf wird der Schlitz ausgebaut, sodass der nicht-konvexe Ausgangsgraph vollends in einer Ecke verschwindet. Die Zeichnung schwankt dann zwischen Schlitz und anderen konvexen Figuren mit wenigen beteiligten Knoten.

Auch bei CACONVEX kann man sich einen solchen Verlauf vorstellen: Ein riesiges Dreieck könnte den Energiewert gegen eins führen, während der Rest der Zeichnung an einer Ecke verschwindet. Dass ein solches Dreieck nicht gebildet wird, liegt vor allem an der Variation und der Selektion, die keine Verschlechterungen akzeptiert. Um aus der ursprünglichen Zeichnung ein derartiges Dreieck zu bilden, muss zunächst ein einzelner Knoten vom Graphen entfernt werden, sodass sich ein Schlitz bildet. CACONVEX bestraft jedoch im Gegensatz zu CPCONVEX solche nach außen ragenden Schlitze, da sich dadurch die Fläche der konvexen Hülle vergrößert, während der Schlitz diese Fläche nicht ausfüllt. Stattdessen zeigt sich in vielen Läufen ein anderer Effekt, der für CACONVEX typisch ist: Stellen, die in die konvexe Hülle hineinragen, werden nicht nach außen befördert, sondern plattgedrückt. Dies ist in Abbildung 5.1(c) gezeigt.

Vermeidung von Schlitzten. Nun stellt sich die Frage, wie die Entwicklung solcher Artefakte verhindert werden kann. Im Bezug auf die konkrete Zeichnung verhindert das Beimischen von $ELSIM_{AM/MAX}$ das Entstehen von Schlitzten bei der Optimierung von

CPCONVEX. Das Ergebnis in Abbildung 5.2(a), das der Idealform des Kreises näher kommt, wird durch nachfolgende Energiefunktion ermöglicht:

$$E := \text{GM}([4, \text{CPCONVEX}], [1, \text{ELSIM}_{\text{AM}/\text{MAX}}]) \quad (5.1)$$

Als Fazit lässt sich festhalten, dass durch Beimischung anderer Energiekomponenten der Entstehung unliebsamer Ausartungen entgegengewirkt werden kann.

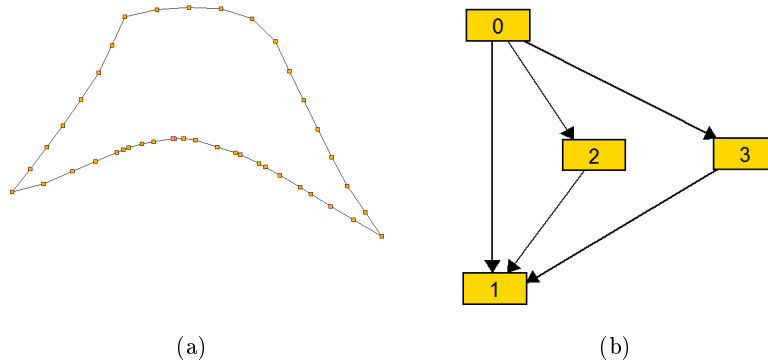


Abbildung 5.2: Konvexität bedarf der Ergänzung durch andere Energiekomponenten: Abbildung (a) zeigt ein besser entfaltetes Ergebnis der Zeichnung aus Abbildung 5.1(a) durch die Optimierung von CPCONVEX und ELSIM_{AM/MAX}. Abbildung (b) zeigt eine Zeichnung, die durch alleinige Optimierung von Konvexität degeneriert.

Das Schlitzproblem hat jedoch grundsätzlichen Charakter: Konvexität sollte besonders dann nicht optimierungsentscheidend wirken, wenn der Graph mit der gewählten Einbettung nicht konvex gezeichnet werden kann. Abbildung 5.2(b) zeigt einen solchen Graphen. Das linke Gebiet sowie das Außengebiet sind Dreiecke und damit unabhängig von der Zeichnung konvex. Die Optimierung der Konvexität des verbleibenden Gebietes wird schließlich das innere Dreieck zu einem Schlitz degenerieren lassen. Konvexität bedarf deshalb stets der Ergänzung durch andere Energiekomponenten.

5.1.1.2 Rundheit

In diesem Abschnitt werden die Energiekomponenten CROUND_{\oplus} und $\text{CCIRCLEFIT}_{\oplus}$ evaluiert.

CROUND_⊕. Bei der Evaluation von $\text{CROUND}_{\text{GM}}$ zeigt sich früh das damit verbundene gestalterische Potential. Dies soll nachfolgend an einigen Optimierungen illustriert werden.

Die Optimierung in Abbildung 5.3 zeigt den ringförmig angeordneten Kreis, der auch zur Evaluation der Konvexität verwendet worden ist. Ähnlich wie bei der Konvexität wird

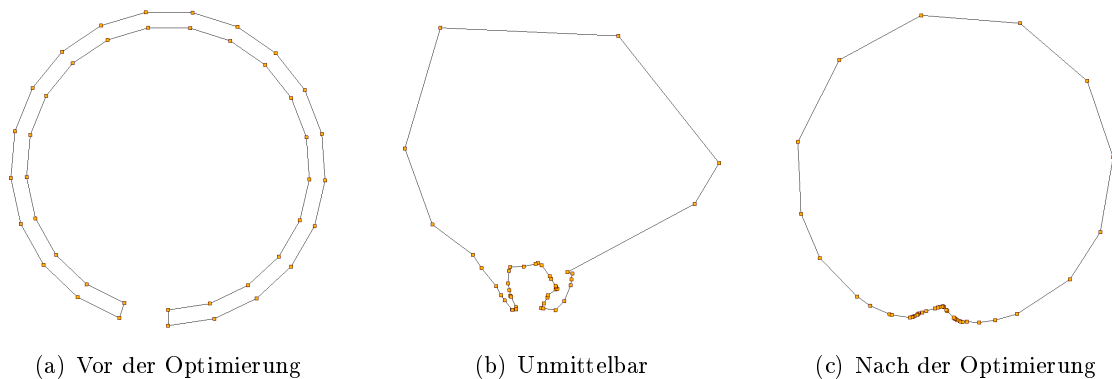


Abbildung 5.3: Optimierung eines nach innen gebogenen Kreises durch $\text{CROUND}_{\text{GM}}$: Tatsächlich entfaltet sich die Zeichnung zu einem Kreis.

auch hier zunächst ein unerwünschter Effekt sichtbar: Der Energiewert wird zunächst dadurch vergrößert, dass eine Minderheit von Knoten ein großes rundes Gebilde erzeugt, während die Ausgangszeichnung relativ gesehen gestaucht wird. Im weiteren Verlauf wird jedoch auch die Einbuchtung nach außen befördert, sodass am Ende eine Kreisform entsteht. Die starke Anhäufung der Knoten an der ursprünglichen Einbuchtungsstelle ist darauf zurückzuführen, dass kein Konstrukt deren uniforme Verteilung auf dem Kreis bewirkt. Die Rundheit kann nach grundsätzlichem Erreichen der Kreisform durch uniforme Verteilung nur noch marginal verbessert werden, sodass die Knoten sehr langsam wandern.

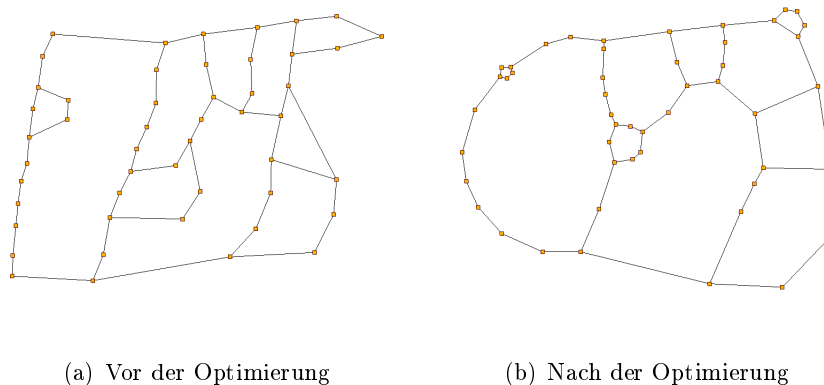


Abbildung 5.4: Optimierung einer händischen Zeichnung durch $\text{CROUND}_{\text{GM}}$: Das Rundheitsmaß entfaltet auch bei mehreren Kreisen im globalen Zusammenhang seine Wirkung.

Die Optimierung in Abbildung 5.4 behandelt die händische Zeichnung eines Graphen mit relativ großen Gebieten. Während in der Ausgangszeichnung die Kanten weitestgehend gerade gezogen sind, wird an dem Endergebnis die rundliche Form deutlich und das Ergebnis wirkt insgesamt organischer. Auffällig sind die unterschiedlichen Größen der Kreise, die letztlich auf ein fehlendes Konstrukt zur Umfangsgerechtigkeit hinweisen. Es zeigt sich

aber auch, dass die Komponente zuverlässlich Rundheit optimiert und offensichtlich auch im globalen Zusammenspiel bei mehreren Kreiszyklen ihre Wirkung entfaltet.

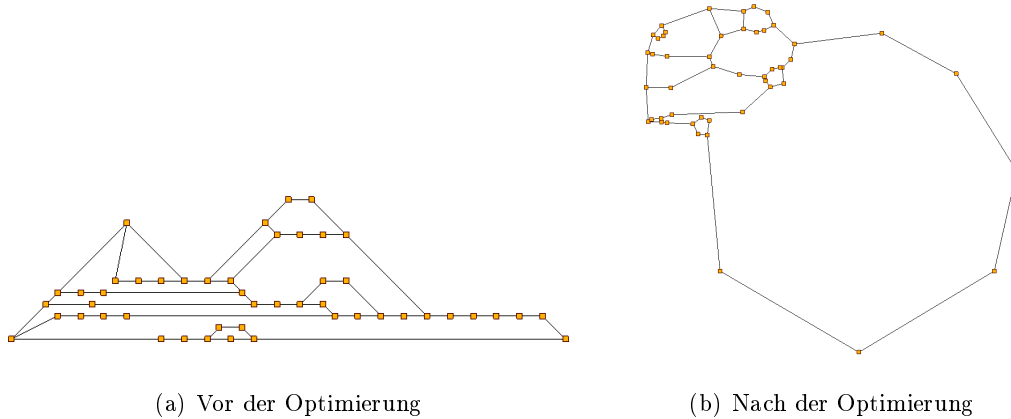


Abbildung 5.5: Optimierung einer geradlinig planaren Zeichnung des Graphen aus Abbildung 5.4(a) durch CROUND_{GM} : Gebiete sind rundlich gezeichnet. Im unteren Teil der Zeichnung wird die Rundheit jedoch nur durch wenige Knoten erwirkt.

Die Optimierung in Abbildung 5.5 behandelt den gleichen Graphen wie die vorherige Optimierung. Jedoch wird dieser zuvor geradlinig planar gezeichnet. Beim Fokus auf den oberen Bereich der Zeichnung kann zunächst festgehalten werden, dass die Entfaltung der Zeichnung durch das Rundheitsmaß gut gelingt. Hier wird eine ähnlich gute Qualität erreicht wie bei der vorherigen Optimierung. Der untere Teil der Zeichnung vereint die Kritikpunkte der beiden vorherigen Optimierungen. Das untere Gebiet ist in der Ursprungszeichnung sehr länglich gezeichnet und in der Mitte durch ein angrenzendes Gebiet unterbrochen. Aufgrund dieses Gebietes ist es in der Optimierung nicht möglich, das gesamte Gebiet nach unten zu entfalten. So wird, wie in der ersten Optimierung, mit dem rechten Teil des Gebietes eine große runde Form gebildet und der linke Teil vernachlässigt. Ein derartig überdimensionales Anwachsen des Gebietes weist wieder auf fehlende Kontrolle des Umfangs hin.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass CROUND_{GM} eine entfaltende Wirkung hat und tatsächlich in Richtung organisch rund erscheinender Gebiete wirkt. Dies wird auch bei der Optimierung mehrerer benachbarter Gebiete deutlich. Unzulänglichkeiten ergeben sich in den Größenverhältnissen der Kreise. Zudem besteht die Gefahr, dass die Rundheit durch wenige Knoten erwirkt wird.

CCIRCLEFIT $_{\oplus}$. Das Rundheitsmaß CCIRCLEFIT_{GM} strebt die Rundheit auf viel explizitere Weise durch den direkten Flächenvergleich mit umschließenden Kreisen an. Abbildung 5.6(b) zeigt, dass für die Gebiete Rundheit erreicht wird. Auch über Gebietsgrenzen hinweg ergeben sich bei verschachtelten Gebieten rundliche Strukturen, was die Wirkung

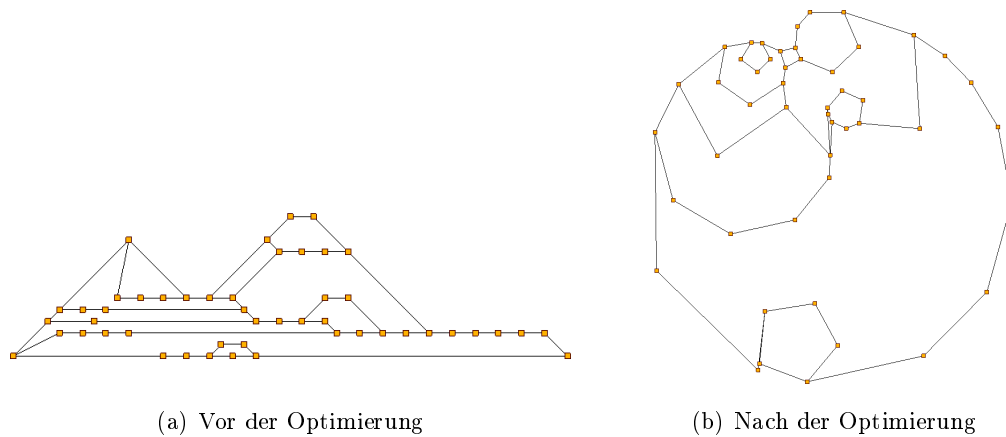


Abbildung 5.6: Die Optimierung von $CCIRCLEFIT_{GM}$ führt zu rundlichen Gebieten und zu schlechter Separation.

des umschließenden Kreises sehr gut illustriert. Es ist erkennbar, dass der umschließende Kreis nicht länglich ist. So richten sich auch hier alle Gebiete so aus, dass sie in keine Raumdimension ausarten. Allerdings ergeben sich ähnliche Artefakte wie zuvor bei der Flächenkonvexität: Da die Optimierung flächenbasiert ist, ist es möglich, durch Zusammendrücken unzureichender Stellen einen besseren Energiewert zu erreichen. So ergeben sich verschwindend kleine Winkel und schlechte Separation. Es zeigt sich, dass diese Effekte nicht wie bei anderen Komponenten durch beigefügte Energiekomponenten kompensiert werden können. Die Energiekomponente ist schließlich anhand eines Ideales definiert, das sich in realen Optimierungssituationen nicht erreichen lässt. Deshalb wird die Komponente nicht weiter betrachtet.

5.1.2 Ähnliche Kantenlängen

In Abschnitt 3.4.4 sind verschiedene Konstrukte zum Erreichen ähnlicher Kantenlängen definiert worden. Dass bei alleiniger Optimierung ähnlicher Kantenlängen keine guten Zeichnungen zu erwarten sind, liegt auf der Hand. Trotzdem ist das Studium derartiger Optimierungen interessant, weil sich einige Effekte der Energiekomponenten beobachten lassen.

5.1.2.1 Globale Ähnlichkeit und der Einfluss des Ähnlichkeitsmaßes

Abbildung 5.7 zeigt die Optimierung der Zeichnung in Abbildung 5.6(a) durch reine ELS_{1M} -Konfigurationen mit verschiedenen Ähnlichkeitsmaßen. Dabei wird zum einen die Zeichnung nach $150 \cdot |V|$ Iterationen aufgeführt. Zum anderen wird der Verlauf der Kantenlängen in der Optimierung anhand der Lagemaße Minimum, arithmetisches Mittel und Maximum verdeutlicht.

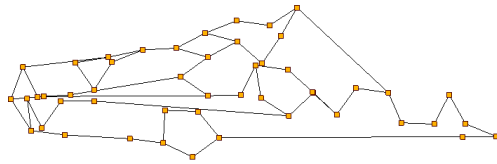
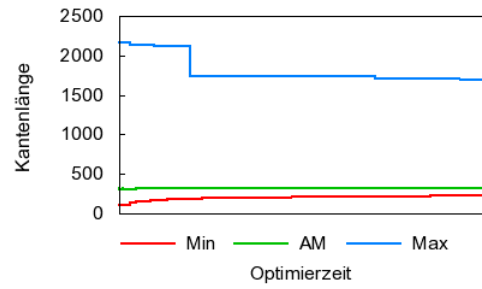
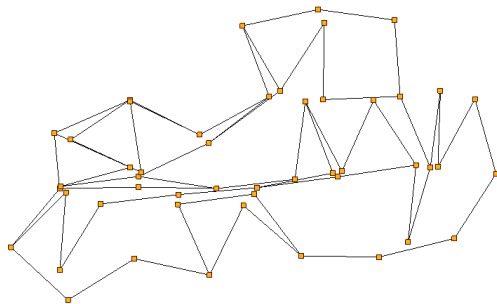
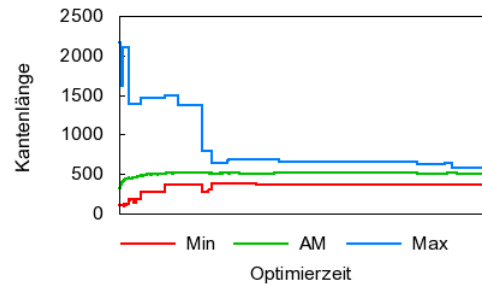
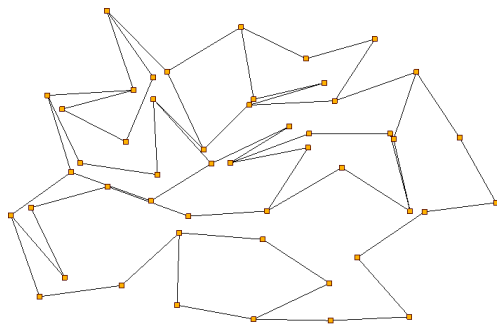
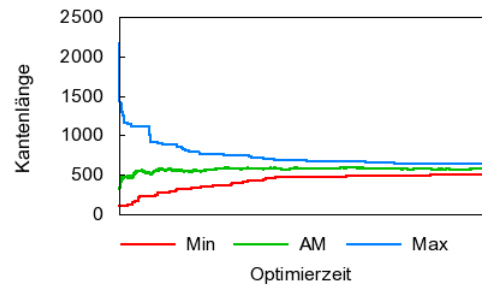
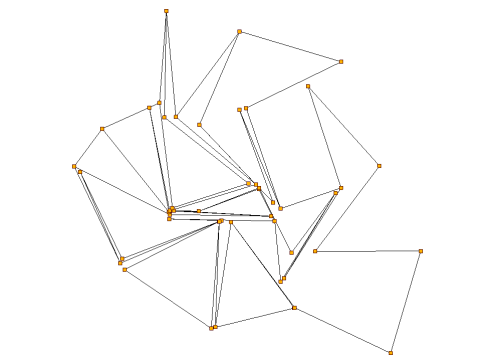
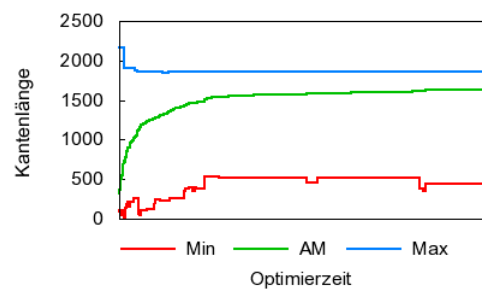
(a) Optimierung von $ELSIM_{MQ}$ (b) Kantenlängenverlauf bei $ELSIM_{MQ}$ (c) Optimierung von $ELSIM_{MD}$ (d) Kantenlängenverlauf bei $ELSIM_{MD}$ (e) Optimierung von $ELSIM_{MIN/MAX}$ (f) Kantenlängenverlauf bei $ELSIM_{MIN/MAX}$ (g) Optimierung von $ELSIM_{AM/MAX}$ (h) Kantenlängenverlauf bei $ELSIM_{AM/MAX}$

Abbildung 5.7: Endergebnisse und Kantenlängenverlaufskurven zur Optimierung reiner ELSIM-Konfigurationen mit unterschiedlichen Ähnlichkeitsmaßen.

- **Gemeinsame Auffälligkeiten:** Einige Effekte lassen sich bei allen Optimierungen beobachten.

Die Separation der Zeichnungen ist schlecht, weil kein Konstrukt die Annäherung zwischen Knotenpaaren oder Knoten und Kanten verhindert. Die Komponenten haben außerdem die Tendenz, schlecht separierte Knotenpaare zu erzeugen. Dies geschieht, wenn gleich lange Kanten von einem gemeinsamen Knoten aus in eine ähnliche Richtung auslaufen.

Da kein Konstrukt ähnliche Winkel bewirkt, entstehen Kantenverläufe mit großen Winkeländerungen, was sich als Zickzackeffekt beschreiben lässt.

Desweiteren zeigen sich spezifische Effekte bei unterschiedlichen Ähnlichkeitsmaßen.

- **ELSIM_{MQ}:** Interessant ist die Beobachtung, dass bei alleiniger Optimierung von ELSIM_{MQ} die Annäherung der Kantenlängen nicht gelingt. In Abbildung 5.7(a) wird deutlich, dass einige Kanten eine gemeinsame typische Länge haben. Überdurchschnittlich lange Kanten bleiben jedoch lang.

Man betrachte die lange Kante unten rechts in Abbildung 5.7(a). Diese würde verkürzt, wenn sich der linke Knoten nach rechts bewegte. Um den Knoten liegen jedoch zwei weitere Kanten, die eine typische Länge aufweisen. Rückt der Knoten nach rechts, so verschlechtert sich der Wert von ELSIM_{MQ}, weil die Verlängerung der beiden typischen Kanten drastischer wirkt als die Verkürzung der langen Kante positiven Einfluss auf die Energiekomponente entfaltet.

Dies deutet auf eine unliebsame Eigenschaft von MQ hin: Hier steht die allgemeine Ähnlichkeit im Vordergrund und Ausreißer werden unzureichend bestraft. Das zeigt sich auch eindrucksvoll am Kantenlängenverlauf in Abbildung 5.7(b): Die maximale Kantenlänge wird einmal verringert und bleibt danach fast konstant. Das gleichbleibende arithmetische Mittel der Kantenlängen deutet – zusammen mit der Ähnlichkeit der Endzeichnung zur ursprünglichen Zeichnung – auf eine starke Stagnation der Zeichnung hin.

Diese Beobachtungen erhalten ein besonderes Gewicht vor dem Hintergrund, dass hier eine reine Konfiguration optimiert wird. Es gibt also keine andere Komponente, die einer Annäherung der Kanten im Wege steht. Daher erstaunt es umso mehr, dass die Komponente bei der Annäherung der Kantenlängen versagt.

- **ELSIM_{MD}:** Die Verlaufskurve in Abbildung 5.7(d) zeigt, dass die Optimierung von ELSIM_{MD} erfolgreicher verläuft. An der starken Annäherung von Minimum und Maximum wird deutlich, dass es gelingt, die Ähnlichkeit der Kantenlängen herbeizuführen. Von Stagnation kann nicht die Rede sein. Das dokumentiert auch die Endzeichnung in Abbildung 5.7(c). Das Anwachsen der durchschnittlichen Kantenlänge

um Faktor 1,60 lässt erkennen, dass es einfacher ist, kurze Kanten zu verlängern als lange Kanten zu verkürzen.

- **ELSIM_{MIN/MAX}**: Eine ähnliche gute Konvergenz zeigt sich bei der Optimierung von ELSIM_{MIN/MAX}. Am Verlauf von Minimum und Maximum in Abbildung 5.7(f) wird erkennbar, dass beide explizit in die Optimierung einfließen und einem gemeinsamen Wert entgegenlaufen. Jedoch ist ergänzend zu erwähnen, dass diese Konfiguration sehr instabil ist. Da hier nur die Extremwerte einfließen werden auch alle Änderungen akzeptiert, die nichts an den Extremwerten ändern. Das Resultat ist ein extremes Zappeln der Zeichnung während der Optimierung. Der Faktor, um den das arithmetische Mittel der Kantenlängen anwächst, ist hier wenig repräsentativ und unterliegt bei mehreren Läufen starken Schwankungen.
- **ELSIM_{AM/MAX}**: Abbildung 5.7(g) enthält die Zeichnung nach der Optimierung von ELSIM_{AM/MAX}. Diese Komponente hat bei den Untersuchungen zur Konvexität das Entstehen von Ausreißern wirksam verhindert. Zur Entfernung von Ausreißern ist das Konstrukt jedoch wenig hilfreich, weil es wesentlich einfacher ist, die durchschnittliche Kantenlänge in die Höhe zu treiben, als eine Minderheit langer Kanten zu verkürzen. Bevor ein Knoten an einer langen Kante zur Verschiebung gewählt wird ist die Anhöhung der durchschnittlichen Kantenlänge aller Wahrscheinlichkeit nach schon mehrfach erfolgt. Abbildung 5.7(h) zeigt, wie sich der Durchschnittswert im Verlauf der Optimierung an das Maximum annähert. Dabei gelingt es offensichtlich nicht vollständig, Ausreißer nach unten zu verhindern.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Optimierung mit MD den gewünschten Effekt erzielt, während MQ versagt. MIN/MAX zeichnet sich durch starke Indifferenz aus, erweist sich aber möglicherweise im Kontext anderer Komponenten als erfolgreich. Bei AM/MAX erscheint es leichter das arithmetische Mittel zu erhöhen, als das Maximum zu senken.

5.1.2.2 Gruppierte Ähnlichkeit und globale Auswirkungen

Die nachfolgenden Untersuchungen gelten der Wirkungsweise gruppierter Kantenlängenähnlichkeit. Eine wesentliche Frage ist, ob sich globale Auswirkungen ergeben: Führt ein Konstrukt, das die Ähnlichkeit der Kantenlängen um alle Knoten bewirkt, auch automatisch zur Ähnlichkeit der Kantenlängen des gesamten Graphen?

Ausbreitung der Kantenlängenähnlichkeit bei einer Kette. Das nachfolgende Experiment geht dieser Frage an einer konstruierten Eingabeinstanz nach. Es wird eine Kette aus 20 Knoten gebildet. Diese sind horizontal angeordnet. Die ersten 10 Knoten haben Abstand 1 von ihrem Vorgänger; die letzten 10 Knoten haben Abstand 10. Die Kette ist

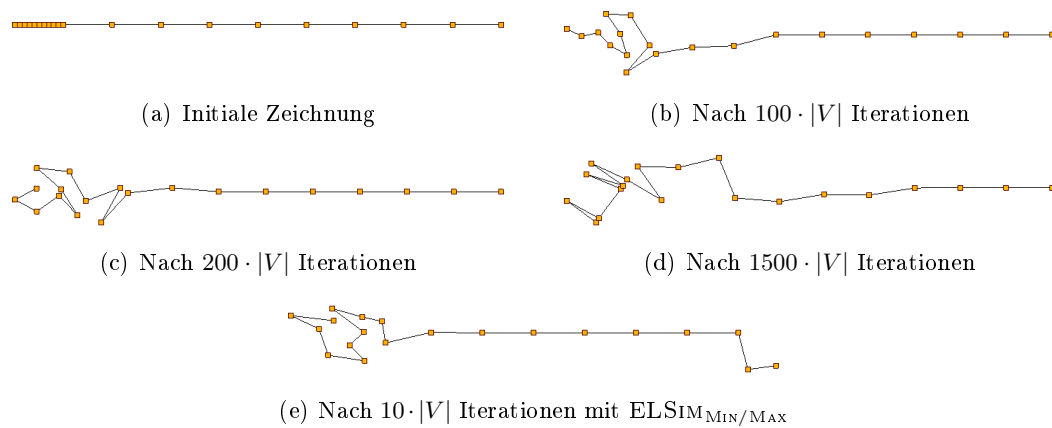


Abbildung 5.8: Globale Auswirkungen bei der Optimierung einer Kette mit $VELSIM_{GM,MIN/MAX}$: Im Verlauf der Optimierung ergibt sich global die Ähnlichkeit der Kantenlängen.

in Abbildung 5.8(a) zu sehen. Als Ähnlichkeitsmaß wird MIN/MAX gewählt. Der Knoten mit dem schlechtesten Beitrag zu $VELSIM_{\oplus,MIN/MAX}$ ist also der Knoten in der Mitte mit einem Beitrag von $1/10$. Alle anderen Knoten haben gleich lange Kanten und liefern den Beitrag 1.

Es besteht ein grundlegender Unterschied darin, wie verschiedene Lagemaße Ausreißer nach unten behandeln: Bei AM verändert sich die Zeichnung überhaupt nicht. Das Angleichen der Ähnlichkeit um den Grenzknoten bedeutet stets Nachteile für die Ähnlichkeitswerte der benachbarten Knoten, die bei AM überwiegen.

Bei GM wird allerdings deutlich, dass sich die Kantenlängen mit der Zeit annähern. Abbildungen 5.8(b) bis 5.8(d) zeigen die Zeichnung nach $100 \cdot |V|$, $200 \cdot |V|$ und $1500 \cdot |V|$ Iterationen. Besonders beim Vergleich der ersten und letzten Kantenlänge in der Kette wird deutlich, dass mit der Zeit auch eine globale Annäherung der Kantenlängen erfolgt. Dazu werden die Längen der kurzen Kanten vergrößert.

Jedoch ist der für die Annäherung benötigte Zeitaufwand unverhältnismäßig groß. Da sich die Ähnlichkeit über die Kette hinweg ausbreiten muss, können eine Vielzahl von Variationen nicht gewinnbringend genutzt werden. Abbildung 5.8(e) verdeutlicht am Stand der Optimierung mit dem globalen Ähnlichkeitsmaß $ELSIM_{MIN/MAX}$ nach $10 \cdot |V|$ Iterationen, dass die globale Angleichung der Kantenlängen trivial ist.

Stabile Zeichnung ohne globale Kantenlängenähnlichkeit. Abbildung 5.9 zeigt eine stabile Zeichnung, bei der es nicht zur Entstehung globaler Auswirkungen kommt. Die Zeichnung ist in zwei Bereiche geteilt: Während die Kanten auf der linken Seite kurz sind, sind die Kanten auf der rechten Seite lang. Ein Schnittknoten in der Mitte markiert den Wechsel von kurzen zu langen Kanten. Wanderte dieser nach rechts, verbesserte sich der $VELSIM_{\oplus,\approx}$ -Beitrag dieses Knotens. Es wird jedoch schnell klar, dass dieses den Beitrag

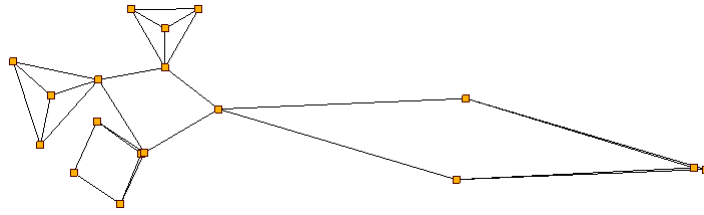


Abbildung 5.9: Gegenbeispiel zur Entstehung globaler Auswirkungen: In dieser stabilen Zeichnung bleibt eine globale Annäherung der Kantenlängen bei der Optimierung von $\text{VELSIM}_{\text{GM,MD}}$ aus.

der Nachbarknoten massiv schädigte. Auch beim Wechsel von Lagemaßen und Ähnlichkeitsmaßen lässt sich dieser Effekt nicht beheben. Es handelt sich um den Fall eines lokalen Optimums.

Zusammenfassung. Bei weniger konstruierten Eingabeinstanzen sind die Gruppen stärker vernetzt als dies im konstruierten Beispiel der Kette der Fall ist. Entsprechend ist auch mit einer schnelleren Ausbreitung einer gemeinsamen Ähnlichkeit zu rechnen. Jedoch sind Ketten in realen Graphen häufig vertreten, sodass das Beispiel hier greift. Als Fazit lässt sich festhalten, dass sich globale Auswirkungen tatsächlich ergeben. Das Negativbeispiel zeigt aber auch, dass es stabile Zeichnungen gibt, bei denen die Optimierung von $\text{VELSIM}_{\oplus,\approx}$ nicht zwangsläufig eine Annäherung aller Kantenlängen bewirkt. Wenn die Angleichung aller Kantenlängen gewünscht ist, sollte auch das entsprechend globale Konstrukt genutzt werden.

5.1.3 Separation

In Abschnitt 3.4.5 wird die Komponente VFREEDOM_{\oplus} zur Separation beschrieben. Diese wird nachfolgend evaluiert.

Implikationen für weitere Optimierungsziele. Beim Betrachten der Definition stellt man fest, dass eine Vielzahl gängiger Optimierungsziele implizit in der Energiekomponente enthalten ist. Dass die Komponente schlecht separierte Knoten bestraft ist offensichtlich. Es werden aber auch kleine Winkel vermieden, da geringe Winkel bedeuten, dass der Endknoten der kürzeren Kante der anderen Kante nah ist.

Außerdem lässt sich eine Verwandtschaft zwischen VFREEDOM_{\oplus} und $\text{VELSIM}_{\oplus,\text{MIN}/\text{AM}}$ aufzeigen: Angenommen, die Zeichnung ist gut separiert. Dann ist für jeden Knoten die Länge seiner kürzesten Kante ausschlaggebend für den Wert von VFREEDOM . Diese wird mit der durchschnittlichen Kantenlänge um den Knoten verglichen. Also wird die Optimierung darauf hinauslaufen, $\text{VELSIM}_{\oplus,\text{MIN}/\text{AM}}$ zu optimieren. Abbildung 5.10 stellt diesen Zusammenhang anhand einer typischen Optimierung dar: Bei der Optimierung von $\text{VFREEDOM}_{\text{GM}}$ zeigt sich eine starke Korrelation mit $\text{VELSIM}_{\text{GM,MIN}/\text{AM}}$, was den zuvor

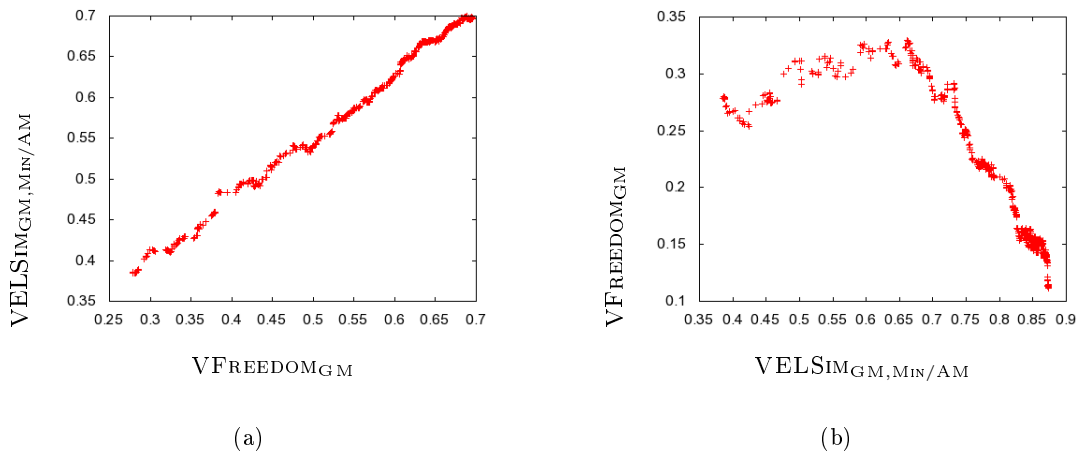


Abbildung 5.10: Zusammenhang zwischen $\text{VFREEDOM}_{\text{GM}}$ und $\text{VELSIM}_{\text{GM},\text{MIN}/\text{AM}}$ bei einer typischen Optimierung: Bei der Optimierung von $\text{VFREEDOM}_{\text{GM}}$ (a) zeigt sich eine starke Korrelation zwischen $\text{VFREEDOM}_{\text{GM}}$ und $\text{VELSIM}_{\text{GM},\text{MIN}/\text{AM}}$. Bei der Optimierung von $\text{VELSIM}_{\text{GM},\text{MIN}/\text{AM}}$ (b) entstehen schlecht separierte Knoten und die positive Korrelation mit $\text{VFREEDOM}_{\text{GM}}$ bleibt aus.

beschriebenen Effekt dokumentiert. Umgekehrt gilt dies jedoch nicht: Beim Optimieren von $\text{VELSIM}_{\text{GM},\text{MIN}/\text{AM}}$ entstehen schlecht separierte Knoten und eine positive Korrelation bleibt aus.

Einfluss des Lagemaßes. Es stellt sich also die Frage, ob VFREEDOM_{\oplus} als allein-stehende Optimierungskomponente genutzt werden kann. Dabei ist vor allem zu klären, welches Lagemaß zu verwenden ist, um tatsächlich gute Ergebnisse zu erzielen, und wie die Funktionswerte für unterschiedliche Lagemaße korrelieren. Abbildung 5.11 zeigt Verlaufskurven der Optimierungen von VFREEDOM_{\oplus} für die Lagemaße AM, GM, ONED₂, ONED₃, ONED₄ und MIN. Dabei wird die Entwicklung über $100 \cdot |V|$ Iterationen betrachtet und auch die Entwicklung des Funktionswertes bezüglich anderer Lagemaße beleuchtet. Nachfolgend wird der Verlauf der Kurven gedeutet. Die Zeichnungen der zugehörigen Optimierungen nach $100 \cdot |V|$ Iterationen sind in Abbildung 5.12 abgebildet.

- **Gemeinsame Auffälligkeiten:** Der Kurvenverlauf der Lagemaße scheint deutlich zu korrelieren. Die Verbesserung der VFREEDOM -Werte einzelner Knoten führt wegen der Monotonie der Lagemaße überall zu Verbesserungen. Außerdem gelten generell die Ordnungsbeziehungen $\text{MAX} \geq \text{AM} \geq \text{ONED}_2 \geq \text{ONED}_3 \geq \text{ONED}_4 \geq \text{MIN}$ und $\text{AM} \geq \text{GM} \geq \text{MIN}$. Diese werden auch an den Verlaufskurven deutlich. Es zeigen sich Unterschiede zwischen den Lagemaßen.
- **$\text{VFREEDOM}_{\text{AM}}$:** In Abbildung 5.11(a) wird deutlich, dass bei AM der Fokus auf schlecht separierte Knoten fehlt. Das Minimum läuft mit wachsender Zeit gegen null.

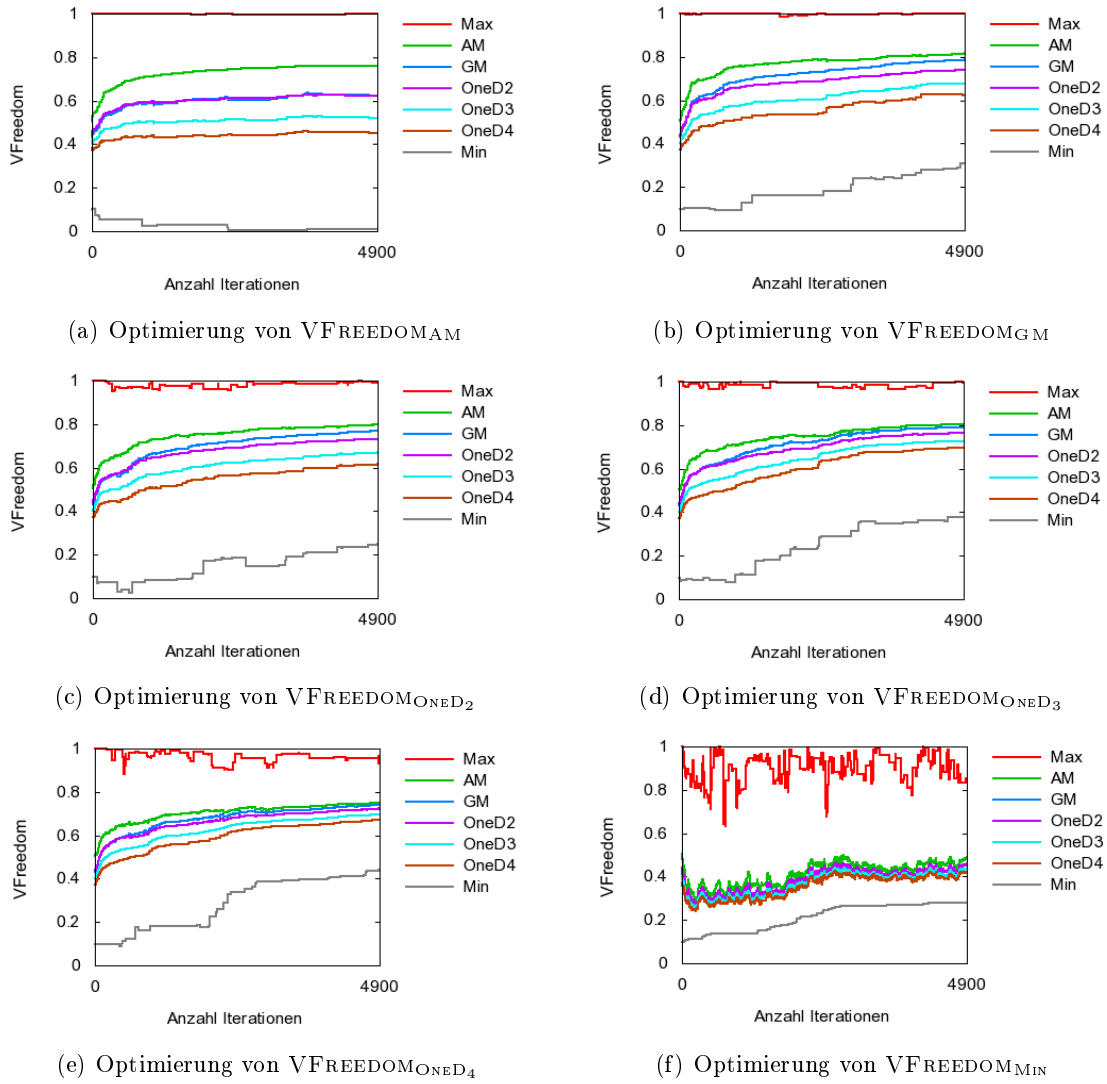


Abbildung 5.11: Verlaufskurven zur Optimierung von V_{FREEDOM} mit unterschiedlichen Lagemaßen: zu jeder Optimierung ist die Entwicklung aller Lagemaße über $100 \cdot |V|$ Iterationen aufgetragen.

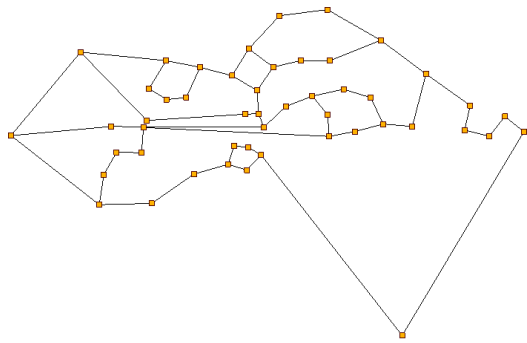
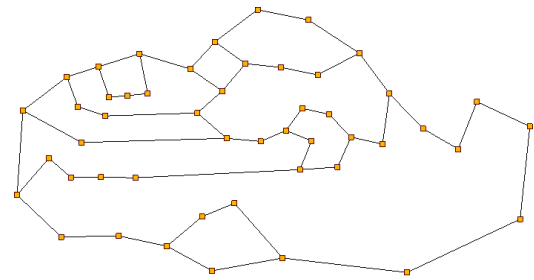
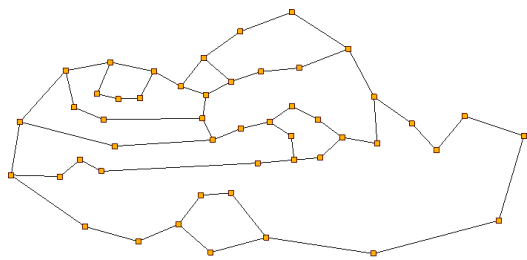
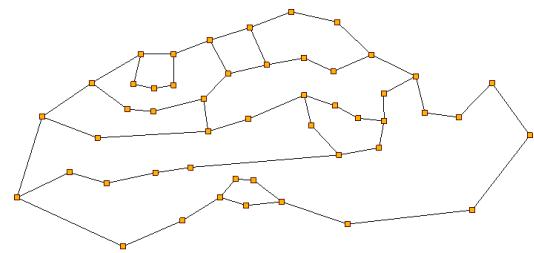
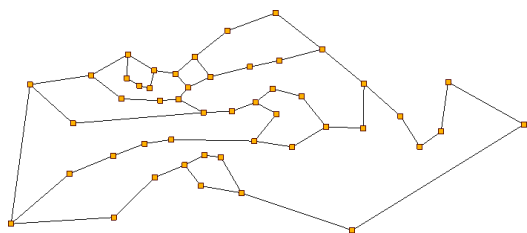
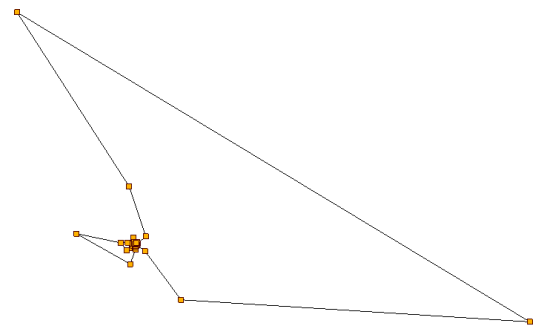
(a) Optimierung von VFREEDOM_{AM} (b) Optimierung von VFREEDOM_{GM} (c) Optimierung von VFREEDOM_{ONED2} (d) Optimierung von VFREEDOM_{ONED3} (e) Optimierung von VFREEDOM_{ONED4} (f) Optimierung von VFREEDOM_{MIN}

Abbildung 5.12: Zeichnungen bei der Optimierung von VFREEDOM mit unterschiedlichen Lagemaßen nach $100 \cdot |V|$ Iterationen.

Offenbar ist es möglich, durch die Vernachlässigung einzelner Knoten bei der Separation im Durchschnitt eine bessere Separation zu erzielen. Auch am Verlauf der Lagemaße ONED_k , die Abweichungen nach unten stärker gewichten, ist ersichtlich, dass das arithmetische Mittel hier schlecht separierte Knoten vernachlässigt. Das Maximum ist jedoch stabil.

- **VFREEDOM_{GM}**: In Abbildung 5.11(b) zeigt sich, dass GM schlechte Werte stärker mit einbezieht. Durch das Produkt fallen Ausreißer nach unten stark ins Gewicht. Eine Optimierung von GM impliziert daher die Verbesserung von MIN. Das wird auch an dem deutlich besseren Verlauf der ONED_k deutlich.
- **VFREEDOM_{ONED_k}**: An den Abbildungen 5.11(c)-(e) lässt sich ablesen, dass die ONED_k -Werte mit wachsendem k Ausreißer nach unten immer stärker gewichten. Dies zeigt sich daran, dass der Endwert des Minimums mit wachsendem k immer größer ausfällt. Der leicht fallende Wert des Maximums mit zunehmendem k mag darauf zurückzuführen sein, dass gute Werte nun nicht mehr ein derartig großes Gewicht erhalten. Im Zweifel wird bei ONED_k ein guter Wert verschlechtert, wenn dadurch ein schlechter Wert entsprechend verbessert werden kann.
- **VFREEDOM_{MIN}**: Abbildung 5.11(f) offenbart die Indifferenz von MIN gegenüber allen Variationen, die nicht das Minimum beeinflussen. Dies zeigt sich bei den anderen Lagemaßen an starkem Rauschen. Die Durchführung vielfältiger schädlicher Variationen führt dazu, dass sich die anderen Lagemaße nicht gut entwickeln. Der durchschnittliche Separationswert unter 0,5 deutet auf eine sehr schlechte Separation hin.

An den Zeichnungen der zugehörigen Optimierungen nach $100 \cdot |V|$ Iterationen in Abbildung 5.12 spiegeln sich die Erkenntnisse zu den Verlaufskurven wider: In Abbildung 5.12(a) zeigt sich der schlecht separierte Knoten, der bei der Optimierung von AM nicht angemessen in den Gesamtwert einfließt. Abbildung 5.12(b) zeugt von der guten Separation aller Knoten durch die Aggregation mit GM. Der Umstand, dass die Zeichnung zu ONED_2 in Abbildung 5.12(c) eher an die Zeichnung zu GM als an die Zeichnung zu AM erinnert, macht erneut die stärkere Gewichtung schlechter Werte deutlich. Zwischen den Zeichnungen 5.12(c) bis 5.12(e) bestehen nur geringe Unterschiede. Abbildung 5.12(f) macht deutlich, dass durch die indifferente Selektion bei MIN starke Schwankungen entstehen, die sich nun in großen Kantenlängenunterschieden niederschlagen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass VFREEDOM_\oplus tatsächlich gute Separation bewirkt. Dies wird auch unabhängig von der vorherigen Untersuchung in anderen Experimenten deutlich. Als Lagemaß hat sich GM besonders bewährt. Dieses tritt durch seine herausragende Berücksichtigung geringer Werte hervor, die auch bei anderen Komponenten wichtig ist.

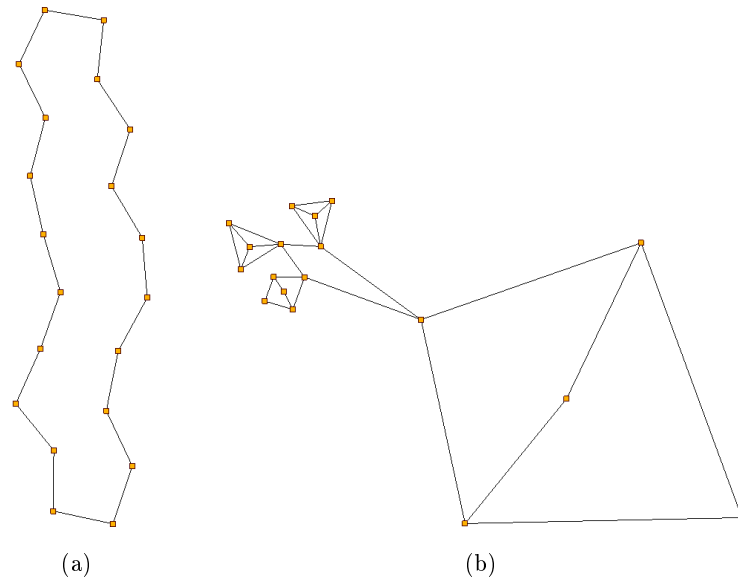


Abbildung 5.13: Stabile Zeichnungen bei der Optimierung von $\text{VFREEDOM}_{\text{GM}}$, die gegen eine alleinige Verwendung der Komponente sprechen: Abbildung (a) zeigt mangelnde Entfaltung bei einem länglichen Gebiet. Abbildung (b) zeigt starke Unterschiede in den Kantenlängen.

Unvollständigkeit der reinen Konfiguration. Hinsichtlich der Frage, ob die Energiekomponente als alleinige Komponente genutzt werden kann, liefern die vorherigen Betrachtungen ein unvollständiges Bild. Abbildung 5.13 verdeutlicht zwei Situationen, in denen die Optimierung von $\text{VFREEDOM}_{\text{GM}}$ unerwünschte Effekte bewirkt. Beide Zeichnungen sind stabil bezüglich der Knotenverschiebung.

- Abbildung 5.13(a) zeigt fehlendes gestalterisches Potential der Energiekomponente: Es handelt sich um einen Kreis, der sehr länglich gezeichnet ist. Der Energiewert ist gut, da die Kanten gleiche Länge haben. Die beiden Seiten des Kreises, die sich nah gegenüberstehen, unterschreiten in ihrem Abstand nicht diese allgemeine Kantenlänge und wirken deshalb auch nicht negativ auf die Separation. Dieses Beispiel ließe sich beliebig vergrößern: Je mehr Kanten man auf dem Kreis einfügte, desto kürzer würde die allgemeine Kantenlänge. Entsprechend nah beieinander dürften die beiden Seiten des Kreises liegen. Eine Zeichnung, die dem Betrachter wie ein Schlitz erscheint, erhielte dennoch einen guten Energiewert. Das fehlende gestalterische Potential lässt sich durch Ergänzung von CROUND_{\oplus} ausgleichen.
- Abbildung 5.13(b) zeigt einen Fall ungleicher Kantenlängen. Die Zeichnung ist in einen Teil mit kurzen Kanten und einen Teil mit langen Kanten geteilt. Die Ähnlichkeit zu $\text{VELSIM}_{\text{GM},\text{MIN}/\text{AM}}$ ist zu Beginn dieses Abschnitts nachgewiesen worden. Ähnlich wie bei dem Beispiel aus Abschnitt 5.1.2 kommt es nicht zu globalen Auswirkungen auf die Kantenlängenähnlichkeit. Betrachtet man die beiden Knoten, an denen sich der Wechsel von kurzen zu langen Kanten vollzieht, so fällt auf, dass die-

se Grad vier und fünf haben. Die längere Kante fließt also nicht mit allzu großem Gewicht in die mittlere Kantenlänge ein, sodass die Knoten insgesamt noch einen mäßigen Beitrag zu $V\text{FREEDOM}_{\text{GM}}$ liefern. Wanderten diese Knoten in Richtung der langen Kante, würde dies zur schlechten Separation ihrer Nachbarknoten führen. Die Knoten mit langen Kanten sind ebenfalls gut separiert. Eine Annäherung dieser Knoten an den Rest des Graphen bedeutete ebenfalls schlechte Separation der Nachbarn und bleibt deshalb aus. Eine globale Annäherung der Kantenlängen lässt sich durch Beimischen von ELSIM_{\approx} bewirken.

5.1.4 Ähnliche Winkel

In Kapitel 3.4.6 ist die Energiekomponente $\text{VANGLESIM}_{\oplus, \approx}$ definiert worden. Bei anderen Komponenten fördert eine reine Konfiguration offensichtliche Schwächen zu Tage, gibt aber auch Hinweise über die Funktionsweise der betrachteten Komponente. Bei alleiniger Optimierung von $\text{VANGLESIM}_{\oplus, \approx}$ treten jedoch bald so extrem lange Kanten auf, dass keine Effekte beobachtet werden können. Die Energiekomponente ELSIM_{MD} hat bei der Evaluation in Kapitel 5.1.2 zu guten Ergebnissen geführt. Im Folgenden betrachten wir daher Konfigurationen

$$E := \text{GM}([10, \text{VANGLESIM}_{\oplus, \approx}], [1, \text{ELSIM}_{\text{MD}}]) \quad (5.2)$$

Die Betrachtung von $\text{VANGLESIM}_{\oplus, \approx}$ erfordert die Festlegung von einem Lagemaß und einem Ähnlichkeitsmaß. Anders als bei $\text{VELSIM}_{\oplus, \approx}$ handelt es sich hier um ein Verteilungsproblem: Die Winkelsumme um jeden Knoten ist stets 2π und das Anwachsen eines Winkels impliziert das Schrumpfen anderer Winkel.

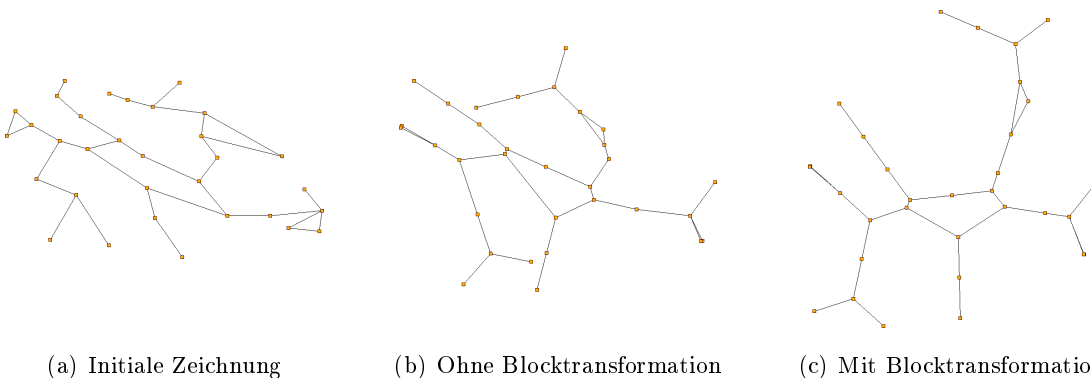


Abbildung 5.14: Optimierung mit Schwerpunkt auf $\text{VANGLESIM}_{\text{GM}, \text{MIN}/\text{AM}}$: Ohne Blocktransformation bleibt die Optimierung in einem lokalen Maximum stecken.

Abbildung 5.14 zeigt eine Optimierung mit Schwerpunkt auf $V_{\text{ANGLESIM}}^{\text{GM,MIN/AM}}$. Das Ähnlichkeitsmaß scheint angebracht, da besonders kleine Winkel störend wirken. Wegen der gleichbleibenden Winkelsumme ist das arithmetische Mittel der Winkel konstant. Es wird ein Graph betrachtet, der baumartig aus vielen Blöcken besteht und nur wenige Gebiete hat. Das Lagemaß wird gewählt, um Ausreißern nach unten wirksam zu begegnen. Diese Wahl folgt den Erkenntnissen zu Lagemaßen bei der Separation aus Abschnitt 5.1.3.

Einfluss der Blocktransformation. Bei der Optimierung in Abbildung 5.14(b) wird auf das Rotieren und Skalieren von Blöcken verzichtet. Es zeigt sich, dass die Optimierung in einem lokalen Maximum steckenbleibt. Besonders der obere Ast, der auch ein Dreieck enthält, weist eine starke Winkeländerung um einen Knoten mit Grad zwei auf. Eine Zeichnung, in der dieser Winkel begradigt ist, hat höheren Energiewert. Man erkennt daran, dass die gut angeordneten Winkel und Kantenlängen im darüberliegenden Teil des Astes einer Verschiebung entgegenstehen. Ein Rotieren durch Knotenverschiebungen ist nicht nur aufwändig, sondern erfordert auch die Akzeptanz schlechterer Energiewerte in Zwischenschritten. Abbildung 5.14(c) macht deutlich, dass die Entfaltung mit Blocktransformation gelingt. Hier kann der gesamte Ast durch eine Rotation um den beeinträchtigten Knoten neu orientiert werden, sodass sich der Energiewert verbessert.

Degenerierte Dreiecke. Ein erstaunliches Artefakt ergibt sich an den Enden zweier Äste, an denen sich Dreiecke befinden. Diese Dreiecke sind in der initialen Zeichnung in Abbildung 5.14(a) deutlich erkennbar. Im Zuge der Optimierung werden jedoch für jedes dieser Dreiecke die Knoten mit Grad zwei sehr eng zusammengestaucht. Durch diese extreme Zusammenstauchung entstehen in dem Dreieck bei beiden Knoten mit Grad zwei Innenwinkel von annähernd 90 Grad. Für die Winkelkomponente bedeutet das einen doppelten Beitrag von $90 \text{ Grad}/180 \text{ Grad} = 0,5$. Um den Knoten, der das Dreieck mit dem Rest des Graphen verbindet, entsteht ein verschwindend geringer Innenwinkel des Dreiecks und ein entsprechend geringer Beitrag. Offensichtlich bevorzugt die Komponente den guten Wert für die beiden Knoten mit Grad zwei. Untersuchungen ergeben, dass sich dieser Effekt nicht durch Austausch von Lagemaßen oder Ähnlichkeitsmaßen verhindern lässt. In gemischten Konfigurationen wird dieses Artefakt jedoch durch andere Energiekomponenten verhindert. Hier wird auch das geringe Gewicht von $EL_{\text{SIM}}^{\text{MD}}$ deutlich.

Fehlende Separation. Zuletzt sei erwähnt, dass der Konfiguration ein wirksames Konstrukt zur Separation fehlt. Einzig die Struktur des Graphen verhindert in dem vorherigen Beispiel das Auftreten schlecht separierter Knoten. Man kann leicht Beispiele mit schlechter Separation konstruieren: Eine Kette von Knoten kann durch Hinzufügen einzelner Nachbarn um Links- und Rechtskurven erweitert werden. Bei entsprechender Länge der Kette und genügend großen Kurven kommt es zu schlecht separierten Knotenpaaren. Die Kette,

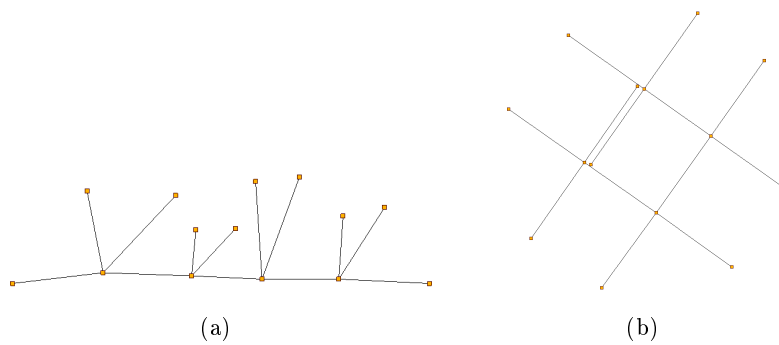


Abbildung 5.15: Einer auf Winkeln und Kantenlängen basierenden Konfiguration fehlt ein Konstrukt zur Separation: Abbildung (a) zeigt die Konstruktion einer Kette, die durch das Hinzufügen von Nachbarknoten um Kurven erweitert wird. Abbildung (b) zeigt schlechte Separation nach der Optimierung.

die sich gemäß der durch die Nachbarn vorgegebenen Kurven biegt, windet sich in diesem Fall in sich selbst hinein. Abbildung 5.15 verdeutlicht die Konstruktion.

5.1.5 Idealer Knotenabstand

In Kapitel 3.4.7 wird ausgeführt, wie aus der Grundidee von Kamada und Kawai [19], deren energiebasiertes Verfahren in Kapitel 2.2.2.2 beschrieben wird, die in sich abgeschlossene Energiekomponente $\text{IDEALDISTANCE}_{\approx}$ entwickelt werden kann. In diesem Abschnitt wird die Komponente evaluiert.

Starker Einfluss der Einbettung. Bei ersten Experimenten zeigt sich der Einfluss der Einbettung.

Die ursprüngliche Zeichnung in Abbildung 5.16(a) enthält verschachtelte Blöcke. Diese werden abgestoßen, sodass sie aus dem Gebiet, in das sie eingebettet sind, hinausstreben. Während dies im allgemeinen Ansatz von Kamada und Kawai kein Problem darstellt, wird dieses Streben hier durch die harte Gültigkeitsanforderung der unveränderten Einbettung begrenzt. Abbildung 5.16(b) zeigt, dass diese Blöcke auf hässliche Art und Weise gegen den Rand des Gebietes, in das sie eingebettet sind, gedrückt werden. Besonders fatal wirkt dieser Effekt bei dem oberen Dreieck und der Brücke unten links. Hier entsteht wegen schlechter V/E -Separation der Eindruck, die Knoten seien Teil des äußeren Kreises. Das Dreieck ist vollkommen degeneriert.

Abbildung 5.16(c) zeigt den gleichen Graphen mit einer Einbettung, die ohne Verschachtelung auskommt. Zu dieser Zeichnung wird in kurzer Optimierzeit die Zeichnung in Abbildung 5.16(d) erzeugt. Hier ist der Idealabstand sehr gut erfüllt. Es wird ersichtlich, wie durch den Idealabstand auch andere Ästhetikkriterien Erfüllung finden. Die Kanten

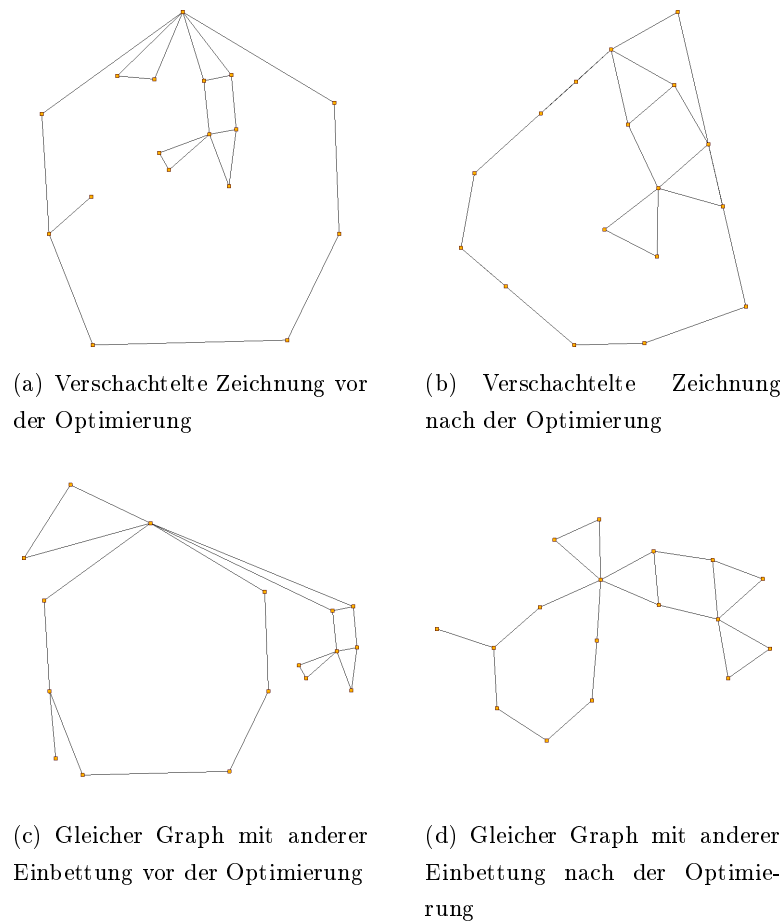


Abbildung 5.16: Der Erfolg einer reinen IDEALDISTANCE-Konfiguration hängt wesentlich von der gewählten Einbettung ab: Bei der verschachtelten Zeichnung (a) werden in der Optimierung (b) einige Knoten an den Rand der Gültigkeitsbeschränkung verschoben. Der gleiche Graph mit einer Einbettung ohne Verschachtelung (c) wird angemessen gezeichnet (d).

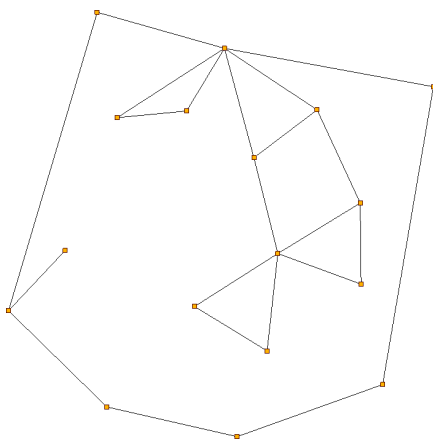
haben ähnliche Längen und die Winkel um die Knoten sind annähernd uniform. Auch die Rundheit der Gebiete wird durch den Idealabstand begünstigt.

Zur Berechnung einer guten Einbettung kann ein Algorithmus von Gutwenger und Mutzel [15] herangezogen werden. Dieser ermittelt eine Einbettung mit maximaler Außenfläche unter allen Einbettungen mit minimaler Verschachtelungstiefe.

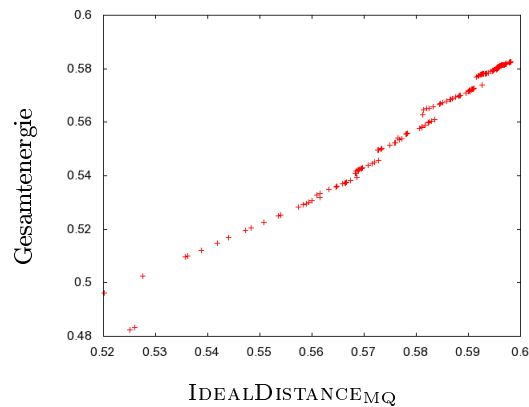
Vermeidung von Überlappungen. Ziel der weiteren Evaluation muss es also sein, dem Konstrukt für die Ideallänge ein wirksames Konstrukt zur V/E -Separation beizustellen. Dabei soll die Gewichtung so gewählt werden, dass einerseits starke Annäherungen wirksam verhindert werden. Andererseits soll der Schwerpunkt weiterhin auf dem Idealabstand liegen. Hierzu wird die folgende Konfiguration betrachtet:

$$E := \text{GM}([10, \text{IDEALDISTANCE}_{\text{MQ}}], [1, \text{VFREEDOM}_{\text{MIN}}]) \quad (5.3)$$

Um den Fokus weiterhin auf IDEALDISTANCE zu legen, wird ein entsprechend hohes Gewicht gewählt. Bezüglich VFREEDOM wird als Lagemaß das Minimum gewählt, um im Sinne der Vermeidung das Augenmerk auf den am schlechtesten separierten Knoten zu legen.



(a)



(b)

Abbildung 5.17: Schlechte Separation bei der Komponente $\text{IDEALDISTANCE}_{\text{MQ}}$ kann durch Beimischen der Komponente $\text{VFREEDOM}_{\text{MIN}}$ verhindert werden. Abbildung (a) zeigt eine verbesserte Zeichnung. Abbildung (b) zeigt die Korrelation zwischen Gesamtenergiewert und $\text{IDEALDISTANCE}_{\text{MQ}}$.

Abbildung 5.17(a) zeigt eine typische Optimierung der Zeichnung 5.16(a) mit der neuen Energiefunktion. Im Vergleich zum vorherigen Ergebnis aus Abbildung 5.16(b) ist nun eine wesentlich bessere Separation gegeben. Besonders der große mittlere Block offenbart in seiner Erscheinung deutlich den Einfluss der Ideallänge. Die Punktwolke in Abbildung 5.17(b) kennzeichnet die starke Korrelation zwischen Gesamtenergiewert und $\text{IDEALDISTANCE}_{\text{MQ}}$ im Verlauf der Optimierung. Dies lässt vermuten, dass die $\text{IDEALDISTANCE}_{\text{MQ}}$ -Komponente in diesem Fall tatsächlich ergebnisentscheidend ist und die $\text{VFREEDOM}_{\text{MIN}}$ -Komponente eher vermeidend wirkt. Der finale Wert dieser Komponente, 0,447, entspricht der Freiheit des Knotens an der Brücke. Die nun gut separierte Position der Brücke ist also auf das Gleichgewicht zwischen den beiden Energiekomponenten zurückzuführen.

5.2 Komplexe Konfigurationen im Vergleich mit Bertault

Dieser Abschnitt nutzt die Erkenntnisse aus Abschnitt 5.1, um komplexe Energiekonfigurationen zu definieren. Diese Konfigurationen erheben den Anspruch vollständiger Energie-

funktionen, die Ästhetik umfassend modellieren. Inwieweit dieser Anspruch gerechtfertigt erscheint, wird im Rahmen dieses Kapitels untersucht. Dazu werden die Varianten auf verschiedenen Graphklassen untersucht. Ein weiterer Bestandteil dieses Kapitels ist der Vergleich von PEO mit dem Verfahren von Bertault [6].

Überblick und Zusammenfassung. Abschnitt 5.2.1 definiert die komplexen Konfigurationen, die in diesem Kapitel evaluiert werden. Die weiteren Abschnitte befassen sich mit der Evaluation der Konfigurationen auf unterschiedlichen Graphklassen.

Abschnitt 5.2.2 evaluiert die Konfigurationen an Bäumen. Die Komponente CROUND_{\oplus} kann nicht entfaltend wirken, da es keine Kreise gibt. Bei Konfigurationen, die auf Winkelähnlichkeit, ähnlichen Kantenlängen und Separation aufbauen, bleibt die Optimierung in lokalen Optima stecken und es kommt zu Versperrungseffekten. Viele Knoten müssen auf engem Raum angeordnet werden. Durch die Verwendung der Blocktransformation werden Zeichnungen besser entfaltet und es entstehen gut separierte Knoten, ähnliche Kantenlängen und uniforme Winkel.

Abschnitt 5.2.3 evaluiert die Konfigurationen an triangulierten Graphen. Bei triangulierten Graphen wirkt die Komponente CROUND_{\oplus} separierend. Es wird aufgezeigt, dass bei einigen Zeichnungen mit Knoten mit hohem Grad prinzipiell keine gute Separation erreicht werden kann. Es werden Blockadeeffekte beleuchtet, die durch ungünstig positionierte Nachbarn entstehen. Nachdem diese Blockaden beseitigt sind, gelingt jedoch die Verkürzung langer Kanten und eine sehr gute Entzerrung der Zeichnung.

Abschnitt 5.2.4 evaluiert die Konfigurationen an zweizusammenhängenden Graphen. Bei zweizusammenhängenden Graphen mit mittelgroßen Gebieten ergeben sich bei unterschiedlichen Konfigurationen vergleichbare Ergebnisse. Die Komponente $\text{CROUND}_{\text{GM}}$ wirkt entfaltend und führt zu rundlichen Gebieten. Die Komponente ELSIM_{MD} führt zur Angleichung der Kantenlängen. Bei Konfigurationen ohne die Komponente VFREEDOM_{\oplus} entstehen vereinzelt schlecht separierte Knoten. Durch Hinzufügen der Komponente wird jedoch gute Separation erreicht. Es wird deutlich, dass lange Kanten nicht immer verkürzt werden.

Abschnitt 5.2.5 evaluiert die Konfigurationen an einem nicht zweizusammenhängenden Graphen. Es zeigt sich, dass bei verschiedenen Konfigurationen die vertikale Entfaltung der Zeichnung nicht gegeben ist. Dadurch müssen viele Knoten auf engem Raum platziert werden. Je nach Konfiguration ergeben sich kurze Kanten, schlecht separierte Knoten oder ein Zickzackeffekt im Kantenverlauf.

5.2.1 Komplexe Konfigurationen

Dieser Abschnitt definiert die komplexen Energiefunktionen, die zur detaillierten Evaluation herangezogen werden. Zur Vereinheitlichung wird in allen Konfigurationen GM als Lagemaß und MD als Ähnlichkeitsmaß verwendet.

Komponenten mit Bezug auf Formmaße von Kreisen nehmen in dieser Arbeit eine besondere Stellung ein. In Kapitel 5.1.1 ist bereits die gestalterische Wirkung von $\text{CROUND}_{\text{GM}}$ gezeigt worden. Die Konfiguration E_{CE} vereint $\text{CROUND}_{\text{GM}}$ und ELSIM_{MD} :

$$E_{CE} := \text{GM}([1, \text{CROUND}_{\text{GM}}], [2, \text{ELSIM}_{\text{MD}}]) \quad (5.4)$$

Die weniger puristische Konfiguration E_{Bicon} fügt die Komponenten $\text{CELFairness}_{\text{MD}}$ und $\text{VANGLESIM}_{\text{GM,MD}}$ hinzu:

$$E_{Bicon} := \text{GM}([2, \text{CROUND}_{\text{GM}}], [2, \text{ELSIM}_{\text{MD}}], [1, \text{CELFairness}_{\text{MD}}], [1, \text{VANGLESIM}_{\text{GM,MD}}]) \quad (5.5)$$

Der Konfiguration E_{Bicon} fehlt es jedoch an einem wirksamen Konstrukt zur Separation der Knoten. Diese Erkenntnis ergibt sich insbesondere aus den in Abschnitt 5.1.4 beschriebenen Untersuchungen, bei denen Graphen mit schlechter Separation für reine Winkel-Kantenlängen-Konfigurationen systematisch erzeugt wurden. Die Konfiguration E_{AllIn} ergänzt deshalb die Konfiguration E_{Bicon} um die Komponente $\text{VFREEDOM}_{\text{GM}}$.

$$E_{AllIn} := \text{GM}([2, \text{CROUND}_{\text{GM}}], [2, \text{ELSIM}_{\text{MD}}], [1, \text{CELFairness}_{\text{MD}}], [1, \text{VANGLESIM}_{\text{GM,MD}}], [1, \text{VFREEDOM}_{\text{GM}}]) \quad (5.6)$$

Die Konfiguration $E_{FreeSim}$ basiert nur auf ähnlichen Kantenlängen und Separation und ist wie folgt definiert:

$$E_{FreeSim} := \text{GM}([3, \text{ELSIM}_{\text{MD}}], [1, \text{VFREEDOM}_{\text{GM}}]) \quad (5.7)$$

In Kapitel 5.1.5 ist die Komponente $\text{IDEALDISTANCE}_{\approx}$ untersucht worden. Diese ist durch die Energiefunktion von Kamada und Kawai [19] inspiriert. Im Rahmen der Studien hat sich herausgestellt, dass vor dem Hintergrund der festgelegten Einbettung ein zusätzliches Konstrukt zur Separation nötig ist. Die Konfiguration E_{ID} wird in großen Teilen durch die Komponente $\text{IDEALDISTANCE}_{\approx}$ geprägt:

$$E_{ID} := \text{GM}([10, \text{IDEALDISTANCE}_{\text{MD}}], [1, \text{VFREEDOM}_{\text{GM}}]) \quad (5.8)$$

5.2.2 Bäume

In diesem Abschnitt werden die Konfigurationen aus Abschnitt 5.2.1 an Bäumen evaluiert. Bei Bäumen steht den Knoten wegen der Beziehung $|E| = |V| - 1$ eine minimale Anzahl an Kanten gegenüber. Der durchschnittliche Knotengrad ist mit $2 \cdot |E| / |V| = 2(|V| - 1) / |V| \approx 2$ sehr gering.

Die Untersuchungen zeigen Versperrungseffekte, die sich bei der Optimierung von Baumzeichnungen durch Konfigurationen ohne Blocktransformation ergeben. Mit Blocktransformation gelingt eine gute Entfaltung und die Optimierungsziele werden erreicht.

Energiekomponenten im Kontext von Bäumen. Bäume zerteilen die Ebene nicht in Gebiete. Formmaße können keine Anwendung finden, da der Graph keine Kreise enthält. Die Komponente $\text{CROUND}_{\text{GM}}$ erhält unabhängig von der Zeichnung den Funktionswert eins.

Da jede Kante eine Brücke ist und es keine weiteren Blöcke gibt, entspricht die Komponente $\text{CELFairness}_{\approx}$ der Komponenten ELSim_{\approx} .

Die Berechnung der Komponenten VFREEDOM_{\oplus} und die Verifikation der Kreuzungsfreiheit gestalten sich aufwändiger als bei anderen Graphen: Bei der Verschiebung eines Knotens sind nur solche Kanten zu berücksichtigen, die sich ein Gebiet mit dem Knoten teilen. Während dies bei anderen Graphen nur wenige Kanten betrifft, müssen bei Bäumen stets alle Kanten berücksichtigt werden. Es gibt keine Einsparungen durch Lokalität.

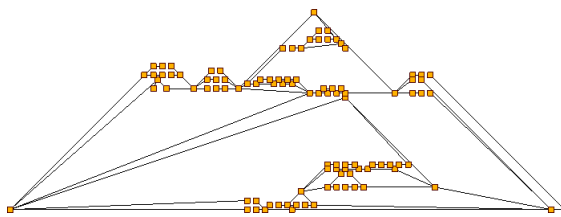


Abbildung 5.18: Geradlinig planare Zeichnung eines Baumes, die als initiale Zeichnung verwendet wird.

Es wird eine Einzelfallperspektive gewählt, doch die Ergebnisse zeigen sich analog bei anderen Bäumen. Abbildung 5.18 zeigt die planare Zeichnung eines generierten Baumes mit 100 Knoten, die als initiale Zeichnung verwendet wird. Hier wird deutlich, dass geradlinig planare Verfahren nicht zum Zeichnen von Bäumen geeignet sind: Aufgrund von schlechter Separation entstehen Missverständnisse darüber, welche Knoten verbunden sind. Die An-

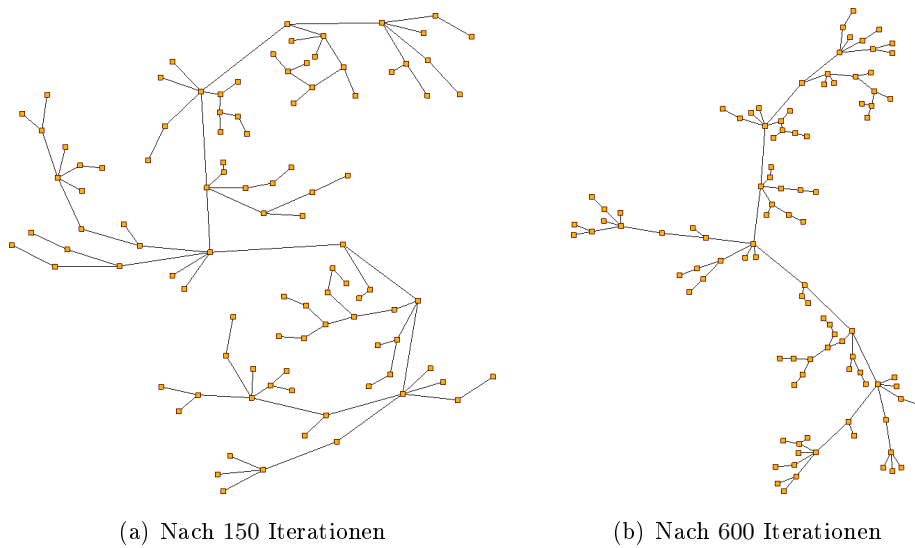


Abbildung 5.19: Zeichnung des Baumes aus Abbildung 5.18 durch das Verfahren von Bertault.

ordnung der Knoten suggeriert die Existenz von Gebieten und von Zweizusammenhang. Der Graph ist nicht als Baum erkennbar.

Bertault. Abbildung 5.19 zeigt die Zeichnung nach 150 und 600 Iterationen der Optimierung durch das Verfahren von Bertault. Die Baumstruktur des Graphen ist auf beiden Zeichnungen deutlich erkennbar. Außerdem gelingt die Annäherung der Kantenlängen und die Knoten sind gut separiert. Während die Zeichnung nach 150 Iterationen noch S-förmig gewunden ist, ist die Zeichnung nach 600 Iterationen durch die abstoßenden Kräfte weiter ausgestreckt. Es zeigt sich ein Unterschied in den Kantenlängen: Innere Kanten werden länger gezeichnet, um die Teilgraphen, die sie verbinden, besser zu separieren. Kanten von Knoten mit Grad eins, die das Ende der Baumstruktur markieren, werden kürzer gezeichnet.

Abbildung 5.20 zeigt die Zeichnungen des Baumes aus Abbildung 5.18 durch die Konfigurationen E_{AllIn} , E_{Bicon} und $E_{FreeSim}$ nach $150 \cdot |V|$ Iterationen ohne und mit Blocktransformation.

Nichterreichen ähnlicher Winkel ohne Blocktransformation. Beim Betrachten der Zeichnungen ohne Blocktransformation in Abbildungen 5.20(a), (c) und (e) wird deutlich, dass bei den Konfigurationen E_{AllIn} , E_{Bicon} und $E_{FreeSim}$ die Angleichung der Winkel um einige Knoten nicht gelingt. Dieser Effekt ist in Abschnitt 5.1.4 bei der Auswertung zu ähnlichen Winkeln beschrieben worden. Die Unähnlichkeit der Winkel um die betroffenen Knoten ist lokal optimal, da durch eine Annäherung der Winkel Qualitätskriterien der Nachbarknoten gestört würden.

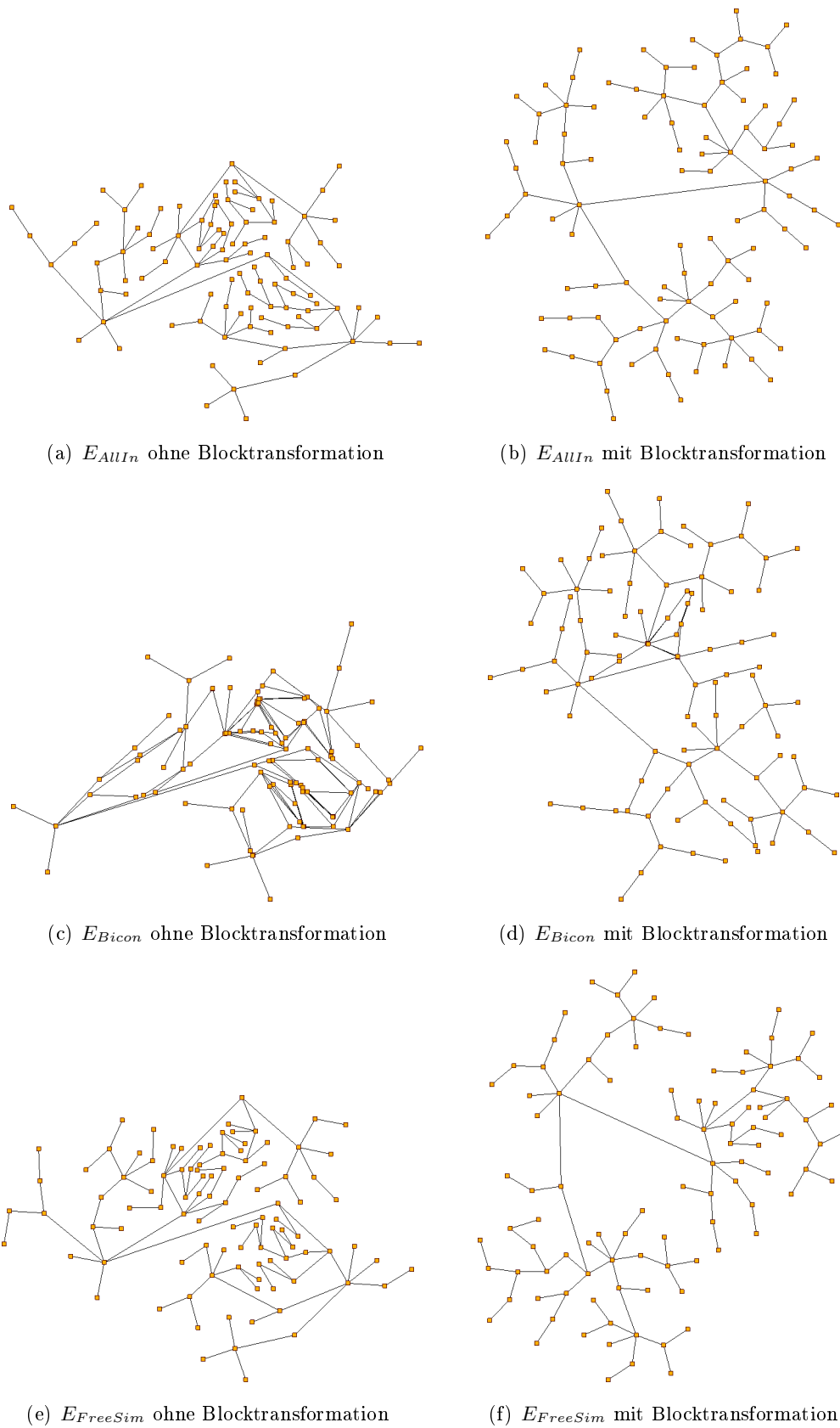


Abbildung 5.20: Zeichnungen des Baumes aus Abbildung 5.18 durch die Konfigurationen E_{AllIn} , E_{Bicon} und $E_{FreeSim}$ nach $150 \cdot |V|$ Iterationen ohne und mit Blocktransformation.

Versperrungseffekt durch unähnliche Winkel. Die Folge derartig verdrehter Äste ist ein Versperrungseffekt: Im oberen Teil der Zeichnungen in den Abbildungen 5.20(a), (c) und (e) sind einige Knoten zu sehen, die sich wegen eines mangelhaft ausgerichteten Astes nicht nach rechts ausbreiten können. Es müssen viele Knoten auf einer geringen Fläche angeordnet werden. Die Komponente $ELSIM_{MD}$ führt zum Anwachsen der Kantenlängen auf kleinem Raum. Bei den Konfigurationen E_{AllIn} und $E_{FreeSim}$ wird dieses Streben durch die Komponente $VFREEDOM_{GM}$ begrenzt. Das Ergebnis ist ein Kompromiss zwischen ähnlichen Kantenlängen und Separation. Die Zeichnungen wirken gedrungen. Die Konfiguration E_{Bicon} enthält keine Komponente zur Separation. Hier wird das Anwachsen der Kanten nur durch die Gültigkeit begrenzt. Die Knoten dieser Zeichnung sind deshalb schlecht separiert und es entsteht der Eindruck von Zweizusammenhang.

Gute Entfaltung mit Blocktransformation. Die Abbildungen 5.20(b), (d) und (f) zeigen, dass die Entfaltung der Zeichnungen mit Blocktransformation gut gelingt. In der Zeichnung zu E_{AllIn} werden die optimierten Ästhetikkriterien erreicht: Die Kanten weisen eine ähnliche Länge auf, die Winkel sind uniform und die Knoten sehr gut separiert. Im Zentrum des Graphen fallen einige Kanten auf, die lang gezeichnet sind, um die Teilgraphen voneinander zu separieren. Derartig lange Kanten im Zentrum des Graphen werden auch durch die Konfigurationen E_{Bicon} und $E_{FreeSim}$ erzeugt. Die Knoten in der Zeichnung zu E_{Bicon} sind mit Blocktransformation wesentlich besser separiert als ohne Blocktransformation. Zwar zeigt auch die Optimierung mit Blocktransformation, dass der Konfiguration eine Separationskomponente fehlt. Dennoch wird die Baumstruktur an der Endzeichnung besser ersichtlich. Auch die Annäherung der Winkel um die Knoten und der Kantenlängen des Graphen gelingt. Bei der Zeichnung zu $E_{FreeSim}$ sind diese Kriterien ebenfalls erfüllt. Hier ist besonders der Einfluss der Separationskomponente auf die Winkel beachtlich: Knoten mit hohem Grad weisen ähnliche Winkel auf, obwohl die Winkelähnlichkeit nicht explizit optimiert wird.

Idealabstand-Konfigurationen. In Abbildung 5.21 sind die Zeichnungen des Baumes aus Abbildung 5.18 durch die Konfigurationen E_{ID} und $IDEALDISTANCE_{MD}$ nach $150 \cdot |V|$ Iterationen ohne und mit Blocktransformation aufgeführt.

Abbildung 5.21(a) zeigt die Optimierung zur Konfiguration E_{ID} ohne Blocktransformation. Drehungen um Knoten mit unähnlichen Winkeln bleiben auch hier aus. Ein Versperrungseffekt tritt jedoch nicht ein. Der obere Bereich der Zeichnung, der bei den Konfigurationen E_{AllIn} , E_{Bicon} und $E_{FreeSim}$ in Abbildung 5.20 gedrungen erscheint, ist durch die Konfiguration E_{ID} entzerrt. Dies ist auf die globale Definition der Energiekomponente $IDEALDISTANCE_{MD}$ zurückzuführen, welche die Abstände aller Knotenpaare berücksichtigt. Auffällig sind einige lange Kanten. Diese stehen im Widerspruch zur Ideallängenforderung, die uniforme Kantenlängen impliziert.

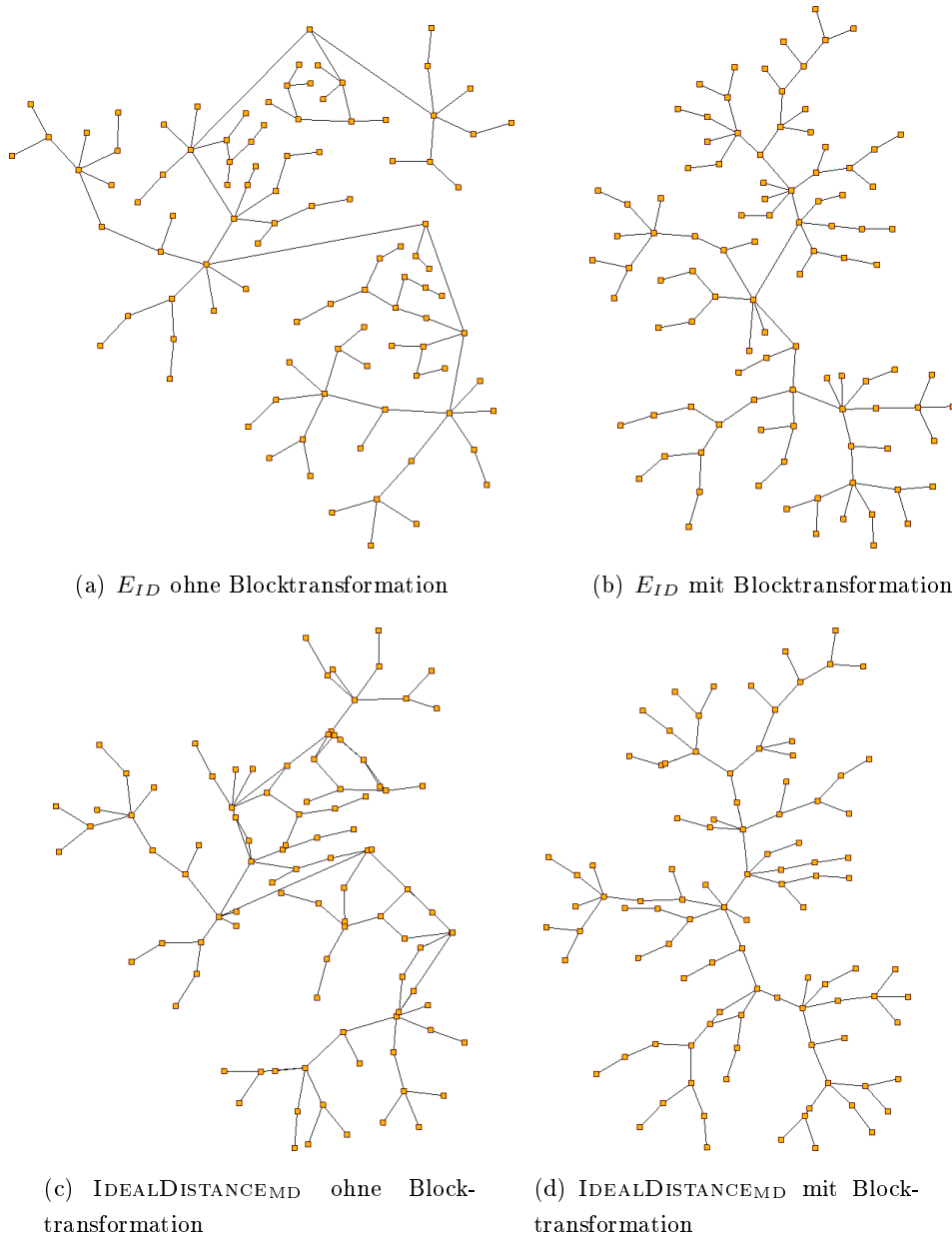


Abbildung 5.21: Zeichnungen des Baumes aus Abbildung 5.18 durch die Konfigurationen E_{ID} und $IDEALDISTANCE_{MD}$ nach $150 \cdot |V|$ Iterationen ohne und mit Blocktransformation.

Abbildung 5.21(b) zeigt die Optimierung zur Konfiguration E_{ID} mit Blocktransformation. Die Zeichnung ist deutlich besser entzerrt und die Knoten sind global im Sinne des idealen Abstandes angeordnet. Die längste Kante ist nur geringfügig länger als die durchschnittliche Kantenlänge.

Bei der Optimierung der reinen Konfiguration $IDEALDISTANCE_{MD}$ ergeben sich schlecht separierte Knoten. Im Vergleich der Abbildungen 5.21(c) und (d) zeigt sich jedoch auch hier der positive Einfluss der Blocktransformation.

5.2.3 Triangulierte Graphen

Im diesem Abschnitt werden die Konfigurationen aus Abschnitt 5.2.1 auf triangulierten Graphen evaluiert. Bei triangulierten Graphen sind alle Gebiete bis auf das Außengebiet Dreiecke. Es gilt die Gleichung $|E| = 3 \cdot |V| - 6$, sodass der durchschnittliche Knotengrad $2 \cdot |E|/|V| = (6|V| - 12)/|V| \approx 6$ beträgt. Triangulierte Graphen sind zweizusammenhängend, sodass nur die Knotenverschiebung als Variation genutzt wird.

Es werden zwei Zeichnungen beleuchtet, an denen unterschiedliche Aspekte sichtbar werden.

Abschnitt 5.2.3.1 macht am Beispiel eines triangulierten Graphen deutlich, dass Zeichnungen von Graphen mit Knoten mit hohem Grad schwierig zu optimieren sind. Durch den hohen Grad ergeben sich kleine Winkel und die Beweglichkeit der Knoten ist stark eingeschränkt. Kleine Winkel und Knoten mit schlechter Separation können in diesem Fall nicht entzerrt werden.

Abschnitt 5.2.3.2 zeigt Blockadesituationen bei der Optimierung einer Zeichnung mit sehr langen Kanten. Die Verkürzung der langen Kanten gelingt so lange nicht, bis durch die Verschiebung weniger Knoten neues Optimierungspotential entsteht. Nachdem die Blockaden beseitigt sind, wird die Zeichnung entzerrt.

Energiekomponenten im Kontext triangulierter Graphen. Dreiecke sind stets konvex. Die Optimierung von Konvexitätsmaßen beschränkt sich bei triangulierten Graphen auf die Optimierung der Konvexität des Außengebietes. Die Komponente $CROUND_{\oplus}$ bewirkt die Annäherung der Gebiete an gleichseitige Dreiecke. Dadurch erhält die Komponente eine separierende Wirkung. Die Komponente $VFREEDOM_{\oplus}$ betrachtet zu jedem Knoten nur Kanten, die sich ein Gebiet mit dem Knoten teilen. Dadurch wirkt die Separationskomponente sehr lokal.

5.2.3.1 Schlechte Optimierbarkeit durch hohen Grad

Triangulierte Graphen haben einen hohen durchschnittlichen Knotengrad. Entsprechend drastisch wirkt ein Ungleichgewicht in den Knotengraden. Abbildung 5.22 zeigt einen triangulierten Graphen mit mehreren Knoten, die hohen Grad haben. Dies führt in der initialen

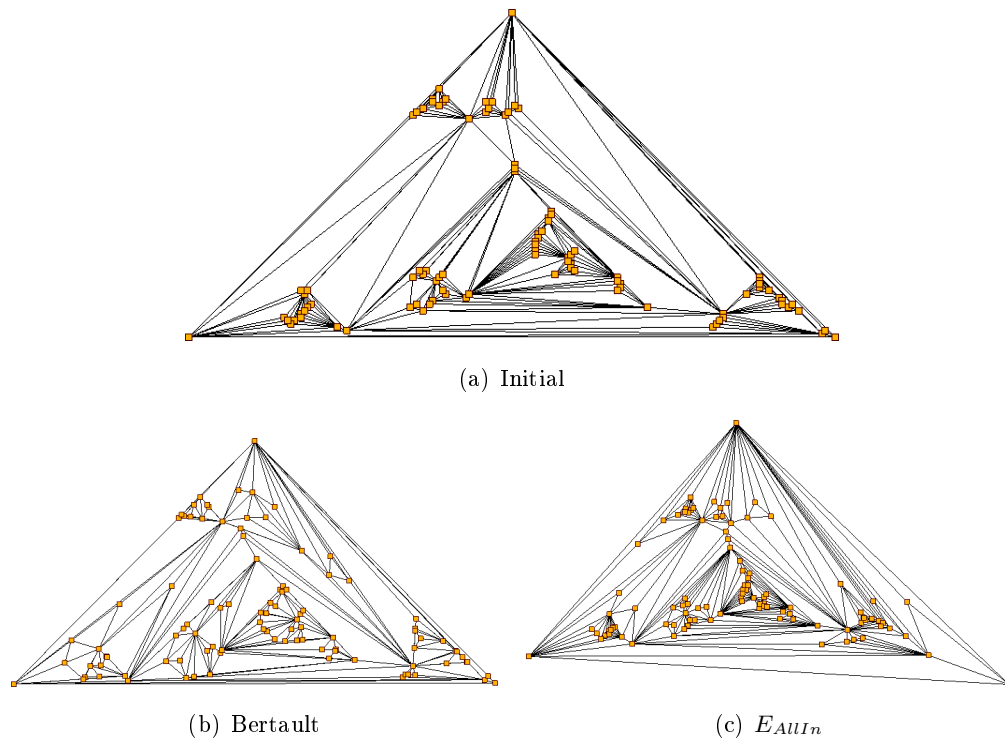


Abbildung 5.22: Zeichnungen eines triangulierten Graphen mit hohen Knotengraden: Durch die hohen Knotengrade ist diese Zeichnung kaum optimierbar.

Zeichnung in Abbildung 5.22(a) zu kleinen Winkeln und zu schlechter Separation. Die gültige Positionsmenge vieler Knoten umfasst nur wenige Punkte. Entsprechend gering ist das Optimierungspotential der Zeichnung. Abbildung 5.22(b) zeigt die Zeichnung nach der Optimierung durch das Verfahren von Bertault. Abbildung 5.22(c) zeigt die Zeichnung nach der Optimierung durch PEO. Die Konfiguration E_{Alln} steht stellvertretend für andere Konfigurationen. Es zeigt sich, dass beide Ansätze nicht in der Lage sind, die Separation der Zeichnung zu verbessern. Auch bei manueller Nachbearbeitung gelingt dies nicht. Diese Zeichnung entzieht sich prinzipiell einer planaren Optimierung der Separation.

5.2.3.2 Blockaden bei der Beseitigung langer Kanten

Dieser Abschnitt dokumentiert im Detail das Fallbeispiel eines Graphen, der durch das Verfahren von Bertault zuverlässig optimiert wird, während sich bei PEO lange Artefakte halten. Es wird ergründet, warum es zunächst nicht gelingt, besonders lange Kanten zu verkürzen.

Abbildung 5.23 zeigt eine geradlinig planare Graphzeichnung, die als initiale Zeichnung verwendet wird. Diese zeigt typische Mängel geradlinig planarer Zeichnungen: Die Form ist an vielen Stellen unansehnlich dreieckig. Es gibt starke Schwankungen in den Kantenlängen und sehr kleine Winkel. Der Abstand zwischen einigen Knoten fällt gering aus. Besonders

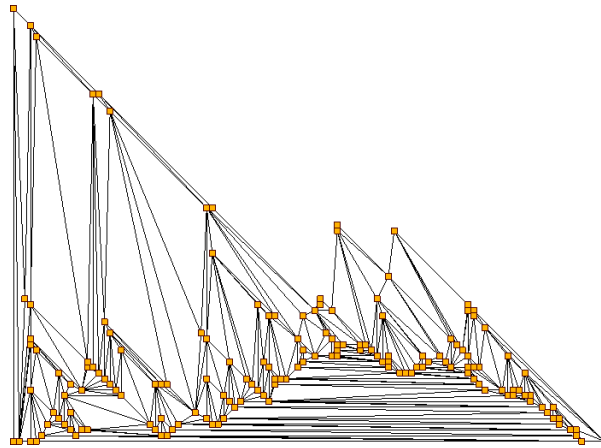


Abbildung 5.23: Zeichnung eines triangulierten Graphen, die lange horizontale Kanten aufweist.

auffällig ist der untere Teil der Zeichnung: Hier verlaufen mit sehr geringem Abstand mehr als 30 sehr lange Kanten in fast horizontaler Richtung.

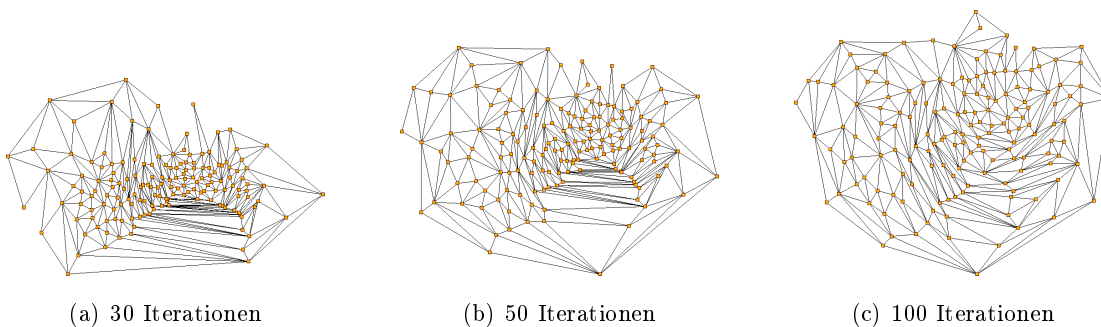


Abbildung 5.24: Optimierung der Zeichnung aus Abbildung 5.23 durch das Verfahren von Bertault: Die langen Kanten werden wirksam verkürzt.

Optimierung durch das Verfahren von Bertault. Wie in Abbildung 5.24 deutlich wird, werden diese Mängel durch das Verfahren von Bertault wirksam behoben. Im Verlauf zeigt sich, wie die langen Kanten immer mehr zusammengezogen werden. Die Abstoßung zwischen den Knoten entzerrt zu nah benachbarte Knotenpaare. Nach 100 Iterationen haben die kritischen Kanten eine Länge erreicht, die nicht mehr als unverhältnismäßig lang wahrgenommen wird. Auch die geringen Winkel sind bis auf wenige Ausnahmen zuverlässig entzerrt.

Überblick: Optimierung durch PEO-Varianten. Nachfolgend wird der Verlauf einer Optimierung dieser Zeichnung mit der Energiefunktion E_{CE} beschrieben. Optimierungen mit den Konfigurationen E_{AllIn} , E_{Bicon} und E_{ID} zeigen einen analogen Verlauf: Zunächst erfolgt eine Optimierung der Randteile der Zeichnung. Die dort befindlichen Dreiecke lassen sich problemlos ausrichten, sodass die Rundheit der Dreiecke gewährleistet ist und die

Kanten eine ähnliche Länge erhalten. Die langen Kanten werden jedoch nicht entzerrt. Dann folgt eine Phase der Stagnation, in der sich nur geringfügige Änderungen ergeben. Schließlich wandern erste Knoten von rechts unter die langen Kanten. Nachdem ein solcher Durchbruch geschehen ist, folgen weitere Knoten. Durch die neue Ausrichtung der Knoten ist es dann möglich, die langen Kanten zu beseitigen. Schlussendlich kann der Graph so ausgerichtet werden, dass alle Kanten eine ähnliche Länge erhalten und auch die Dreiecke rundlich erscheinen. Im Folgenden wird dieser Verlauf an Abbildungen illustriert und vertieft.

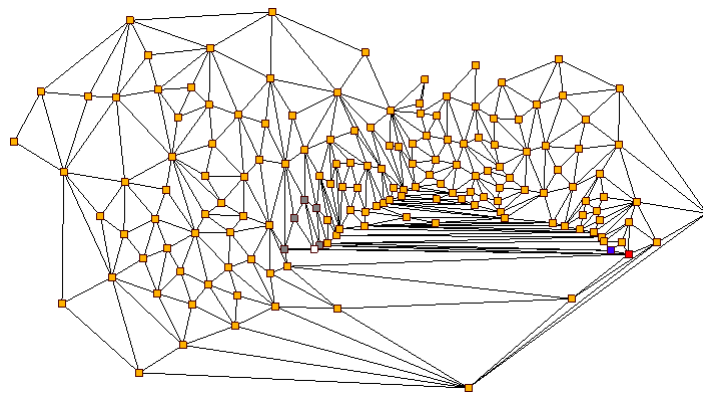


Abbildung 5.25: Anfangsphase der Optimierung der Zeichnung aus Abbildung 5.23 durch PEO: Nach $50 \cdot |V|$ Iterationen ist die Zeichnung an den Rändern entzerrt. Die langen Kanten sind noch nicht verkürzt.

Anfangsphase und Blockaden. Abbildung 5.25 zeigt die Zeichnung nach $50 \cdot |V|$ Iterationen. Links und rechts oben zeigen sich Dreiecke mit guter Rundheit und ähnlichen Kantenlängen. Hier ist es durch wenige Verschiebungen möglich, das Optimierungsziel zu erreichen. Die langen Kanten sind jedoch weiterhin erhalten. Eine geringe Zahl von Knoten ist nach unten entfaltet, sodass sich die langen Kanten in der Mitte der Zeichnung befinden.

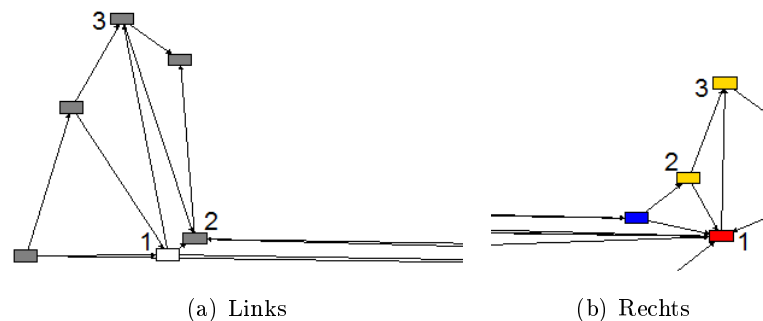


Abbildung 5.26: Versperrungseffekte bei der Optimierung der Zeichnung aus Abbildung 5.23 durch PEO. Die Abbildungen sind Ausschnitte aus der Zeichnung nach $50 \cdot |V|$ Iterationen.

Abbildung 5.26 verdeutlicht an zwei Ausschnitten aus der Zeichnung 5.25 Blockaden, welche die Verkürzung der langen Kanten verhindern. Zur Einordnung der Ausschnitte in den Originalgraphen sind die Knoten auch in Abbildung 5.25 farblich markiert. Abbildung 5.26(a) zeigt eine Blockadesituation auf der linken Seite der langen Kanten. Der Knoten mit der Nummer 1 hat eine Vielzahl von Nachbarn. Eine Kante führt steil nach oben zu Knoten 3. Unmittelbar rechts oben befindet sich ein weiterer Knoten mit der Nummer 2. Bewegt sich Knoten 1 zu weit nach rechts, wird die Einbettung um Knoten 3 verletzt, da die Kanten $(3, 2)$ und $(3, 1)$ umorientiert werden. Die steil nach oben verlaufende Kante führt also zur starken Einschränkung der gültigen Positionsmenge des Knotens 1. Auch im Rahmen der Möglichkeiten wird der Knoten nicht ganz in Richtung der langen Kante verschoben. Offensichtlich würde sonst die Form des Dreiecks $(1, 2, 3)$ in Richtung eines Schlitzes verändert. Dies bedeutete einen verschlechterten Wert der Komponente $\text{CROUND}_{\text{GM}}$. Analog verhält es sich bei Knoten 1 auf der rechten Seite in Abbildung 5.26(b). Beide Knoten stehen stellvertretend für eine Vielzahl von Knoten, die auf diese Weise blockiert sind.

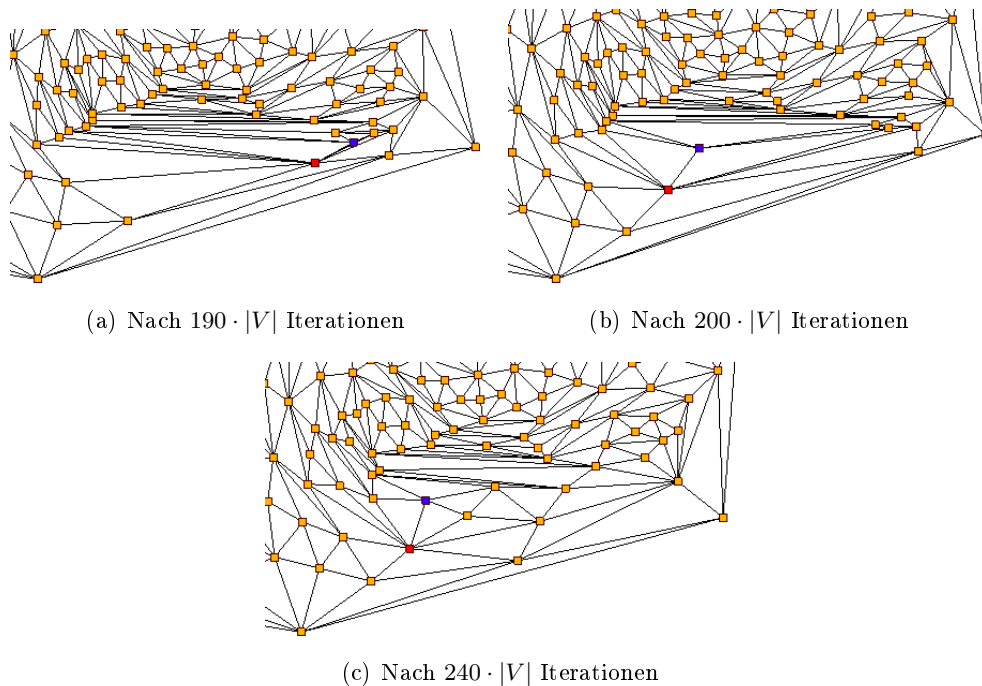


Abbildung 5.27: Durchbruch beim Erreichen ähnlicher Kantenlängen bei der Optimierung der Zeichnung aus Abbildung 5.23 durch PEO.

Durchbruch. Abbildung 5.27 zeigt einen Ausschnitt der Zeichnung nach $190 \cdot |V|$, $200 \cdot |V|$ und $240 \cdot |V|$ Iterationen. Im Verlauf dieser Iterationen wandern einige Knoten von rechts unter die langen Kanten. Dieser Durchbruch wird von zwei Knoten eingeleitet, die rot und blau markiert sind. Abbildung 5.27(a) zeigt, dass der blaue Knoten nicht blockiert ist und in Richtung der langen Kanten nach links entweichen kann. In Abbildung 5.27(b) sind der

rote und der blaue Knoten nach links verschoben. Abbildung 5.27(c) zeigt, dass andere Knoten folgen.

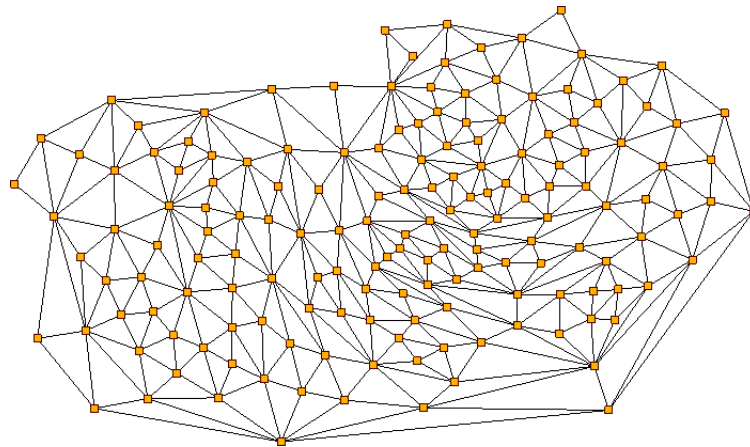


Abbildung 5.28: Endergebnis der Optimierung der Zeichnung aus Abbildung 5.23 durch PEO: Nach $500 \cdot |V|$ Iterationen ist die Zeichnung entzerrt.

Endergebnis. Nach dem Durchbruch werden die Kantenlängen fortlaufend angeglichen. Nach $500 \cdot |V|$ Iterationen ist die Zeichnung entzerrt. Abbildung 5.28 zeigt die zugehörige Zeichnung, die sich durch ähnliche Kantenlängen und rundliche Dreiecke auszeichnet.

5.2.4 Zweizusammenhängende Graphen

Zur Evaluation der Konfigurationen aus Abschnitt 5.2.1 an zweizusammenhängenden Graphen werden zwei Fallbeispiele betrachtet.

Abschnitt 5.2.4.1 thematisiert die Optimierung eines zweizusammenhängenden Graphen mit 100 Knoten und 150 Kanten. Es zeigen sich starke Ähnlichkeiten in den Zeichnungen verschiedener Konfigurationen. Es wird deutlich, dass bei Konfigurationen ohne explizite Optimierung der Separation schlecht separierte Knoten entstehen. Jedoch wirkt die Komponente `CROUNDGM` entfaltend, sodass schlechte Separation an vielen Stellen vermieden wird.

Abschnitt 5.2.4.2 zeigt einen Fall, bei dem lange Kanten nicht verkürzt werden. Außerdem zeigt sich der Unterschied zwischen lokaler Separation, wie sie durch die Komponente `VFREEDOMGM` bewirkt wird, und globalen Abstoßungskräften bei Bertault.

5.2.4.1 Generierter zweizusammenhängender Graph

Abbildung 5.29 zeigt Zeichnungen eines zweizusammenhängenden Graphen nach $600 \cdot |V|$ Iterationen der Optimierung durch verschiedene Konfigurationen. Der Graph ist durch die Methode `planarBiconnectedGraph` des Open Graph Drawing Frameworks (OGDF) [3] erzeugt worden. Er hat 100 Knoten und 150 Kanten.

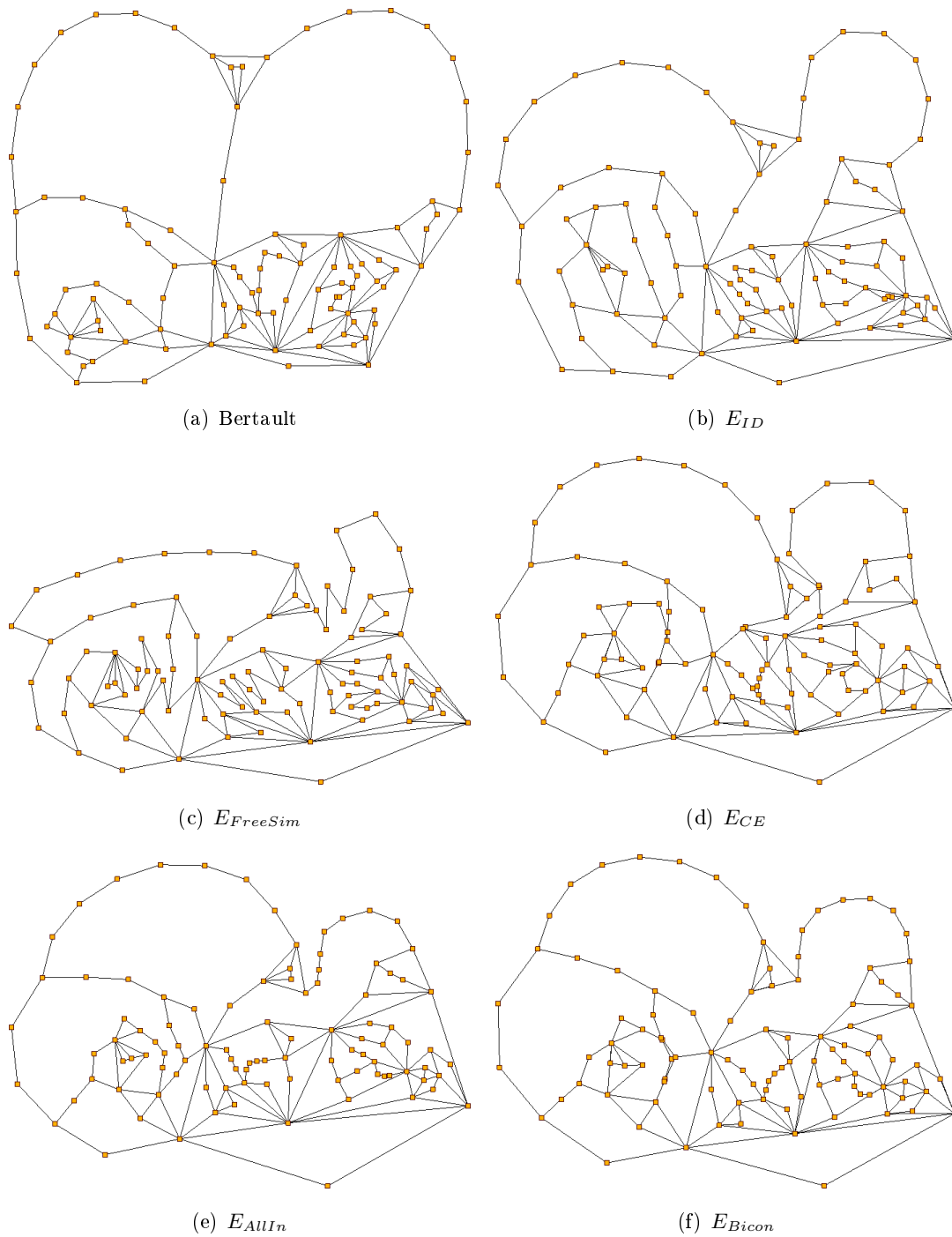


Abbildung 5.29: Zeichnungen eines zweizusammenhängenden Graphen nach $600 \cdot |V|$ Iterationen der Optimierung durch verschiedene Konfigurationen.

Grundsätzliche Ähnlichkeit. Bei einem ersten Blick auf die Zeichnungen fällt auf, dass diese sich sehr ähnlich sind. Insbesondere die Konfigurationen E_{ID} , E_{CE} , E_{AllIn} und E_{Bicon} führen zu vergleichbaren Zeichnungen. Gebiete sind zumeist rundlich gezeichnet, Kanten haben ähnliche Längen. Die Zeichnung des Verfahrens von Bertault unterscheidet sich hauptsächlich im oberen Teil von den zuvor genannten Zeichnungen.

Symmetrie. Im oberen Teil der Zeichnung befinden sich zwei große Gebiete. Diese werden durch verschiedene Konfigurationen unterschiedlich gezeichnet. Bei Bertault sind die Gebiete mittig geteilt und auf symmetrische Weise gleich groß gezeichnet. Bei PEO ist die Unterteilung nach rechts verzerrt. Während das linke Gebiet eine rundliche Form erhält, ist das rechte Gebiet durch einen Engpass geteilt. Erst über diesem Engpass bildet sich bei E_{ID} , E_{CE} , E_{AllIn} und E_{Bicon} eine rundliche Form aus.

Ausrichtung von Kanten bei Platzmangel, Zickzackeffekt. In der Mitte der Zeichnung sind einige Gebiete beengt gezeichnet. Es zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen der Konfiguration $E_{FreeSim}$ und den anderen Konfigurationen. $E_{FreeSim}$ zeichnet die Kanten mit normaler Länge. Durch den Platzmangel werden sie in wechselnde Richtungen ausgerichtet, sodass ein Zickzackeffekt entsteht. Die Konfigurationen E_{CE} , E_{AllIn} und E_{Bicon} tendieren zu verkürzten Kanten. Die verkürzten Kanten werden so ausgerichtet, dass die Gebiete rundlich sind.

Separation. Alle Zeichnungen weisen vereinzelt Stellen mit schlechter Separation auf. Vermehrt zeigt sich dies bei den Konfigurationen E_{CE} und E_{Bicon} . Diese Konfigurationen optimieren die Separation nicht explizit, sodass beim Auftreten schlecht separierter Stellen kein Konstrukt Entzerrung bewirkt. Es zeigt sich jedoch auch die Wirkung der Komponenten $CROUND_{GM}$, die an vielen Stellen der Zeichnung sehr gute Separation impliziert.

Vertikale Entfaltung. Beim Blick auf die Seitenverhältnisse der Zeichnungen zeigen sich Unterschiede, inwieweit Zeichnungen vertikal entfaltet werden. Die ursprüngliche Zeichnung ist eher horizontal ausgerichtet, wie es für geradlinig planare Zeichnungen üblich ist. Bei Bertault und E_{ID} werden die Zeichnungen im Zuge der Optimierung vertikal entfaltet. Bei $E_{FreeSim}$ ist die Form des linken oberen Gebietes länglich. Hier zeigt sich die wenig gestaltende Wirkung der Energiekomponente $VFREEDOM_{GM}$.

Lange Kanten. Lange Kanten werden unterschiedlich behandelt. Im unteren Bereich der Zeichnung sind bei allen PEO-Varianten lange Kanten sichtbar. Bei Bertault ist die entsprechende Stelle zusammengezogen. Das Verbindungsstück im oberen Bereich der Zeichnung, das die beiden großen Gebiete voneinander trennt, ist unterschiedlich lang. Bei Bertault

stoßen sich der obere und der untere Bereich der Zeichnung ab. Dadurch wird das Verbindungsstück lang gezogen. Dagegen tendieren die Verbindungsstücke bei PEO zu einer durchschnittlichen Länge.

5.2.4.2 Sierpinski-Dreieck mit veränderter Einbettung

Abbildung 5.30 zeigt Zeichnungen eines Graphen, der topologisch einem Sierpinski-Dreieck mit Rekursionstiefe vier gleicht. Die Einbettung ist jedoch verändert.

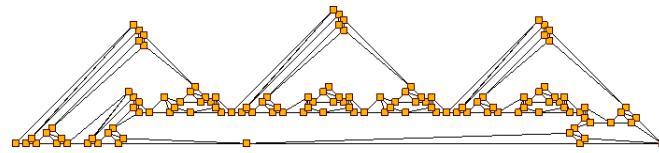
Initiale Zeichnung. Abbildung 5.30(a) zeigt die initiale Zeichnung. Der untere Bereich der Zeichnung zeigt lange Kanten um einen Knoten mit Grad vier. Die meisten Knoten des größten Gebietes sind horizontal auf einer Linie darüber angeordnet. Desweiteren sind Unterschiede in den Kantenlängen und kleine Winkel erkennbar.

Erkennbare Topologie nach der Optimierung. Abbildung 5.30(b) zeigt die Zeichnung des Verfahrens von Bertault. Abbildungen 5.30(c) und (d) zeigen Zeichnungen der PEO-Varianten E_{ID} und E_{AllIn} . In den drei Zeichnungen ist die Topologie des Graphen erkennbar. Dreiecke sind aufgrund der geringen Unterschiede in den Kantenlängen als solche erkennbar. Die Zeichnungen sind gut separiert.

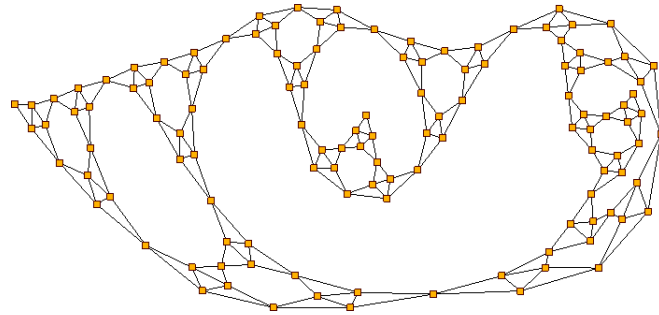
Dreiecke, Flächen und Separation. Bei Bertault haben einige Dreiecke unterschiedliche Kantenlängen und sind dadurch leicht länglich gezeichnet. Große Gebiete sind großflächig gezeichnet. Bei den PEO-Varianten haben die meisten Dreiecke gleiche Seitenlängen. Viele kleine Dreiecke reichen in große Gebiete hinein. Dadurch werden große Gebiete weniger flächig gezeichnet und die Zeichnung wirkt kompakter. Hier zeigt sich ein Unterschied in der Separation: Bei Bertault wirken abstoßende Kräfte auch über große Entfernungen hinweg. Bei PEO hat die Separation einen lokalen Charakter.

Lange Kanten. Bei Bertault werden einige Knoten vom Rand in Richtung des Knotens mit den langen Kanten verschoben. Dadurch werden die langen Kanten verkürzt. Bei den PEO-Varianten bleiben die Kanten um den unteren Knoten lang.

Nutzen des unteren Knotens. Die Position des unteren Knotens zeigt den unterschiedlichen Fokus der Energiefunktionen E_{ID} und E_{AllIn} . Bei E_{ID} ist das Optimierungsziel durch idealen Abstand und damit durch ähnliche Kantenlängen bestimmt. Entsprechend wird der Knoten in die Mitte seiner vier Nachbarn platziert: Dies verkürzt die Kanten. Bei E_{AllIn} wirkt die Komponente `CROUNDGM` gestaltend. Der Knoten ist nach unten ausgelekt, um das große Gebiet rund erscheinen zu lassen. Hier zeigt sich der bekannte Effekt, dass durch die Positionierung weniger Knoten ein Formmaß optimiert wird.



(a) Initial



(b) Bertault

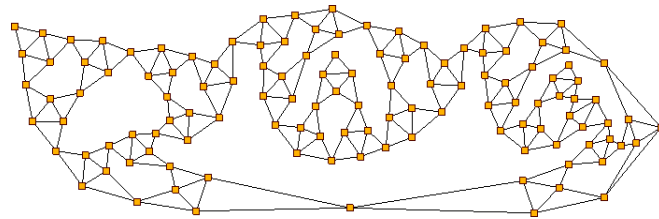
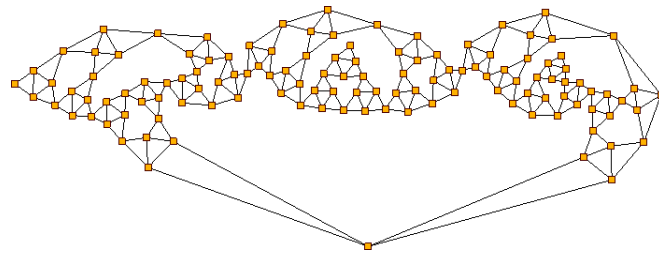
(c) E_{ID} (d) E_{AllIn}

Abbildung 5.30: Zeichnungen eines Sierpinski-Dreiecks mit Rekursionstiefe vier und veränderter Einbettung nach $150 \cdot |V|$ Iterationen der Optimierung durch verschiedene Konfigurationen.

5.2.5 Nicht zweizusammenhängende Graphen

Das Verhalten der Konfigurationen aus Abschnitt 5.2.1 wird beispielhaft auf einem nicht zweizusammenhängenden Graphen evaluiert. Die Effekte, die entstehen, sind auch bei weiteren nicht zweizusammenhängenden Graphen beobachtet worden.

Bei den Konfigurationen $E_{FreeSim}$, E_{CE} , E_{AllIn} und E_{Bicon} gelingt die vertikale Entfaltung der Zeichnung nicht. In Folge dessen müssen viele Knoten auf engem Raum platziert werden. Je nach Konfiguration ergeben sich unterschiedliche Artefakte.

Abbildung 5.31 zeigt Zeichnungen eines nicht zweizusammenhängenden Graphen durch verschiedene Konfigurationen. Der Graph besteht im Wesentlichen aus einigen Gebieten, in die Blöcke eingebettet sind. Dabei handelt es sich vor allem um einzelne Brücken oder um Ketten von Brücken.

Vertikale Entfaltung. Besonders auffällig ist der mittlere Teil der Zeichnung. Dieser ist durch die verschiedenen Verfahren unterschiedlich entfaltet. Bei Bertault ist der mittlere Teil in vertikaler Richtung gestreckt. In Folge dessen sind Details der Zeichnung gut erkennbar. Die Zeichnungen zu $E_{FreeSim}$, E_{CE} , E_{AllIn} und E_{Bicon} sind eher horizontal ausgerichtet und im mittleren Teil gestaucht. Dadurch werden die hier befindlichen Details nicht genügend sichtbar. Bei E_{ID} ist die Stauchung weniger extrem ausgebildet. Dies ist auf die globale Definition der Energiekomponente zurückzuführen.

Betrachtung von Ausschnitten. Aufgrund der schlechten Entfaltung sind die Positionen der Knoten im Mittelteil nur schwer ersichtlich. Abbildung 5.32 zeigt vergrößerte Ausschnitte des Mittelteils der Zeichnungen aus Abbildung 5.31, die im Folgenden betrachtet werden.

Kurze Kanten bei E_{ID} . Abbildung 5.32(a) verdeutlicht einen unerwünschten Effekt bei der Konfiguration E_{ID} : Die Kanten eines Astes, der zu wenig Platz hat, haben kurze Länge. Durch die geringen Werte der durchschnittlichen Kantenlängen um die beteiligten Knoten ist der Beitrag der Knoten zur Komponente $V_{FREEDOM_{GM}}$ hoch. Die Knoten gelten als gut separiert. Der hohe Separationswert dieser Knoten kompensiert offenbar die Verringerung des Wertes der Komponente $IDEALDISTANCE_{MD}$ durch die kurzen Kanten.

Zickzackeffekt bei $E_{FreeSim}$. Abbildung 5.32(b) zeigt den bekannten Zickzackeffekt bei der Konfiguration $E_{FreeSim}$. Die Anhebung der Kantenlängen auf geringem Raum erfolgt durch extreme Winkeländerungen. Die Knoten sind mäßig separiert.

Fehlende Separation bei E_{CE} und E_{Bicon} . Abbildungen 5.32(c) und (e) lassen das degenerierte Verhalten der Konfigurationen E_{CE} und E_{Bicon} erkennen. Die Notwendigkeit einer expliziten Optimierung der Separation wird deutlich. E_{CE} enthält keine Restriktionen

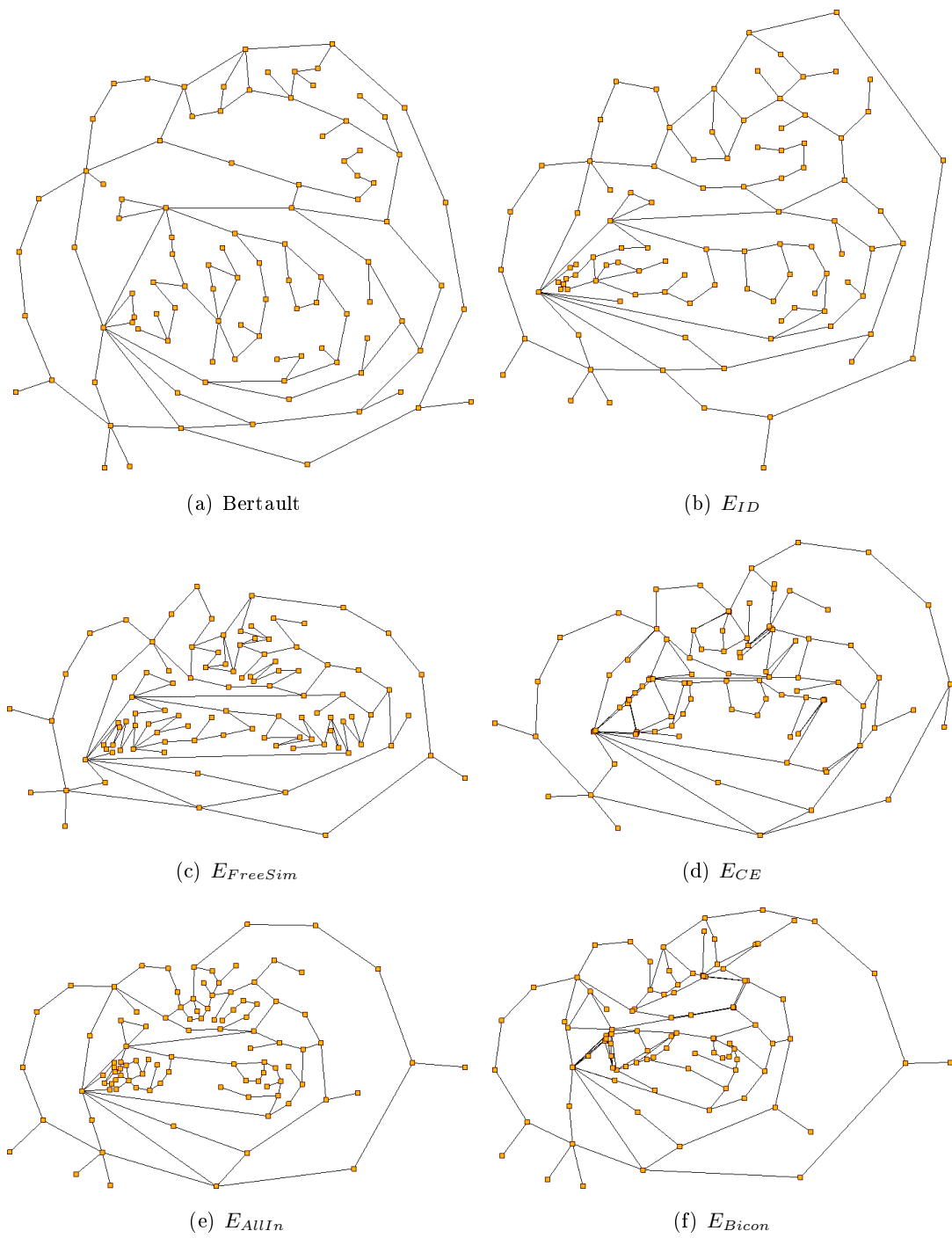


Abbildung 5.31: Zeichnungen eines Graphen mit verschachtelten Brücken nach $150 \cdot |V|$ Iterationen der Optimierung durch verschiedene Konfigurationen.

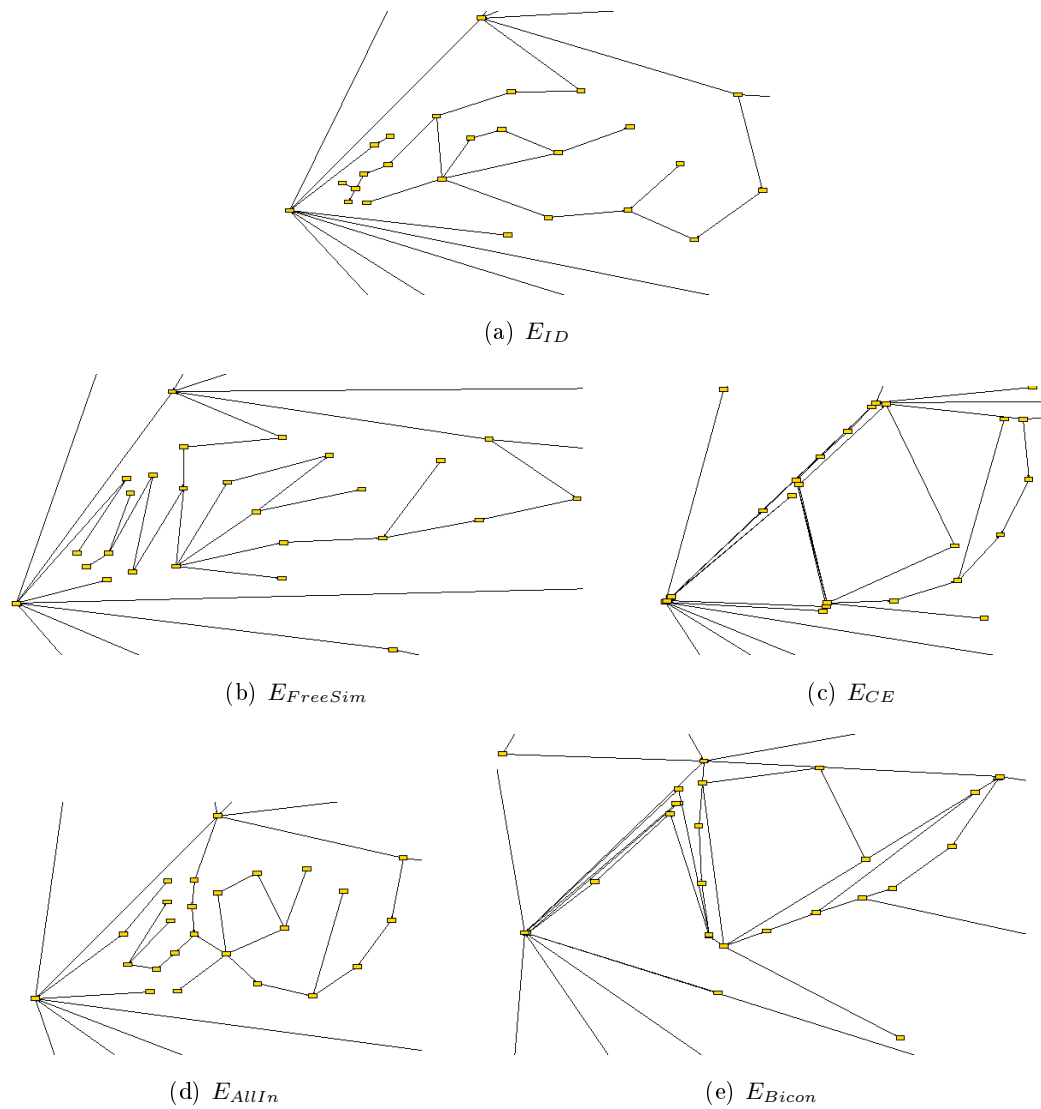


Abbildung 5.32: Platzmangel wegen schlechter Entfaltung: Je nach Konfigurationen ergeben sich unterschiedliche Effekte zur Kompensation des Platzmangels, der durch mangelnde Entfaltung der Zeichnung entsteht – Vergrößerte Ausschnitte des Mittelteils der Zeichnungen aus Abbildung 5.31.

der Richtung, in die Brücken ausgerichtet werden. Da Formmaße Brücken nicht behandeln, fließt hier allein die Länge der Brücken in die Energiefunktion ein. Dies führt zu lang gezeichneten Kanten auf engem Raum. Die Kantenlängen werden nur durch die Gültigkeit beschränkt, was schlechte Separation zur Folge hat. Bei E_{Bicon} wirkt die Komponente $V_{ANGLESIM_{GM,MD}}$ in Richtung der Angleichung der Winkel um die Knoten. Die Effekte durch lang gezeichnete Kanten auf engem Raum entstehen dennoch analog.

Kompromisse bei E_{AllIn} . Abbildung 5.32(d) zeigt die Positionierung des Astes durch die Konfiguration E_{AllIn} . Aufgrund des Platzmangels wird ein Kompromiss zwischen den Energiekomponenten $EL_{SIM_{MD}}$, $V_{FREEDOM_{GM}}$ und $V_{ANGLESIM_{GM,MD}}$ eingegangen. Zu Beginn des Astes sind die Kanten kurz gezeichnet. Die Winkel sind jedoch ähnlich und der Beitrag der Knoten zur Separationskomponente ist wegen der geringen durchschnittlichen Kantenlänge hoch. Dann erfolgt eine Winkeländerung im Verlauf des Astes zu Gunsten der Separation. Zwei Kanten am Ende des Astes sind entgegengesetzt zur ursprünglichen Richtung des Astes ausgelenkt und länger gezeichnet als die vorherigen. Die Länge der Kante kommt der Ähnlichkeit der Kantenlängen entgegen, impliziert aber ungleiche Winkel und mäßige Separation.

5.3 Kreuzungen und Knicke

Dieser Abschnitt evaluiert die Erweiterungen von PEO aus Abschnitt 3.5. Dort wird das Verfahren um die Funktionalität erweitert, Zeichnungen mit Kreuzungen und Knicken zu adaptieren.

Abschnitt 5.3.1 verdeutlicht grundsätzliche Wirkungsweisen im Zusammenhang mit Kreuzungen und Knicken.

Abschnitt 5.3.2 adaptiert Zeichnungen anderer Verfahren.

Abschnitt 5.3.3 beleuchtet schließlich die Möglichkeiten einer dynamischen Knickentfernung.

Kräftebasierte, orthogonale und hierarchische Zeichnungen, die als initiale Zeichnungen verwendet werden, sind mit Hilfe des GoVisual Diagram Editors (GDE) [2] erzeugt worden.

5.3.1 Grundsätzliche Wirkungsweisen

In diesem Abschnitt werden die grundsätzlichen Wirkungszusammenhänge im Zusammenhang mit Kreuzungen und Knicken aufgedeckt. Dazu werden zunächst weiche und harte Kreuzungsbegradigung gegeneinander abgegrenzt. Dann erfolgt eine Betrachtung der ästhetischen Möglichkeiten von Knicken.

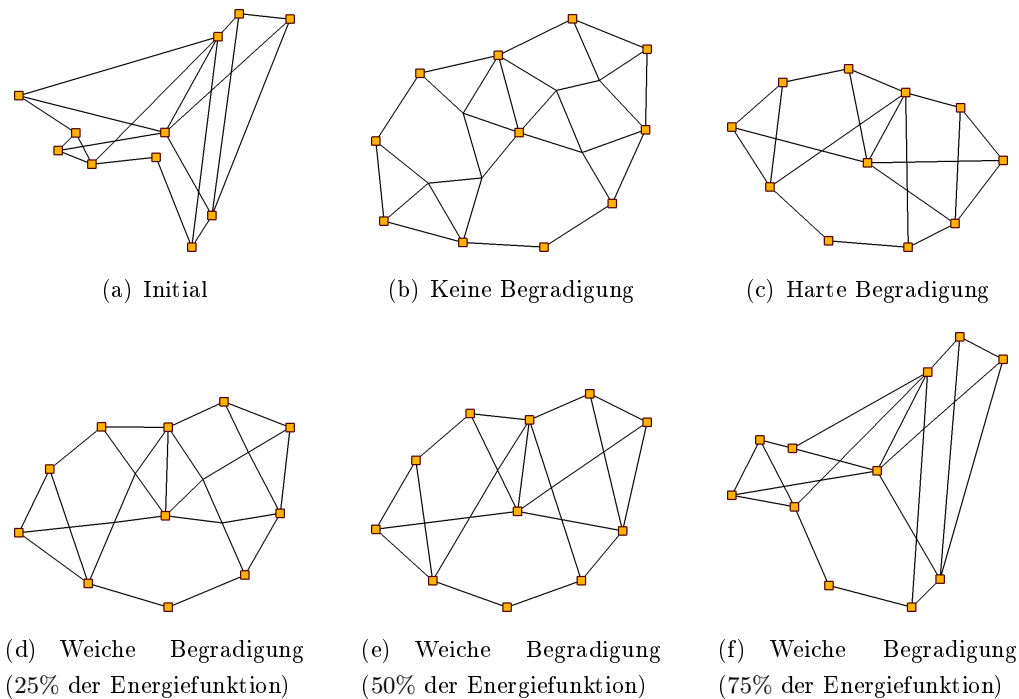


Abbildung 5.33: Verschiedene Formen der Begradigung.

5.3.1.1 Harte und weiche Kreuzungsbegradigung

Abbildung 5.33 verdeutlicht verschiedene Formen der Begradigung. Die initiale Zeichnung in Abbildung 5.33(a) zeigt 11 Knoten und 6 Kreuzungen. Die Kreuzungen sind begradigt, jedoch wirkt die Zeichnung deformiert. Zur Optimierung wird die Konfiguration E_{Bicom} verwendet.

- **Keine Begradigung:** Abbildung 5.33(b) zeigt die Zeichnung einer Optimierung ohne Begradigung. Kreuzungen werden wie normale Knoten verschoben, um beispielsweise die Rundheit der Gebiete zu optimieren. Dadurch entstehen um Kreuzungsknoten große Winkel. Die mangelnde Begradigung erzeugt Missverständnisse darüber, welche Knoten verbunden sind. Hier ist die Wichtigkeit der Kreuzungsbegradigung erkennbar.
- **Harte Begradigung:** Abbildung 5.33(c) enthält die Zeichnung einer Optimierung mit harter Begradigung. Hier sind die Kreuzungen vollständig begradigt. Trotz der Einschränkungen durch die starren Kreuzungsknoten gelingt es, eine Zeichnung mit runden Gebieten zu erzeugen.
- **Weiche Begradigung:** Die Abbildungen 5.33(d)-(f) zeigen Zeichnungen von Optimierungen mit weicher Begradigung. Die Energiefunktion ist um die Komponente $STRAIGHTCROSS_{GM}$ erweitert. Dabei erhält die Komponente ein relatives Gewicht von 25%, 50% und 75%.

Bei der Optimierung mit Gewicht 25% in Abbildung 5.33(d) ist der Einfluss der Begradigungskomponente erkennbar. Missverständliche Stellen werden durch die Energiekomponente vermieden. Insbesondere zur Bewirkung rundlicher Dreiecke werden jedoch Knicke der Originalkanten in Kreuzungsknoten in Kauf genommen.

Bei der Optimierung mit Gewicht 50% in Abbildung 5.33(e) sind die Kreuzungen weitestgehend begradigt. Die Zeichnung ist der Zeichnung zur harten Begradigung ähnlich. Jedoch ist bei genauem Hinschauen weiterhin erkennbar, dass die Kreuzungsknoten eine unabhängige Position erhalten. Für einige Originalkanten stellen die Kreuzungsknoten einen Knick dar.

Die Optimierung mit Gewicht 75% in Abbildung 5.33(f) zeigt Stagnation. Die Zeichnung erinnert stark an die initiale Zeichnung, in der die Kreuzungen begradigt sind. Weder normale Knoten noch Kreuzungsknoten werden verschoben: Die Begradigung hat ein so hohes Gewicht, dass temporäre Verschlechterungen der Begradigung nicht durch Verbesserungen der anderen Energiekomponenten kompensiert werden.

5.3.1.2 Ästhetisches Potential von Knicken

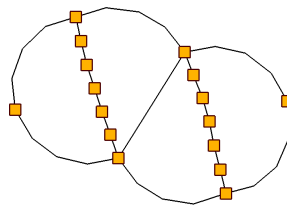


Abbildung 5.34: Organischer Kantenfluss durch das Zusammenspiel von Knicken und Rundheit.

Es ist ein bekanntes Phänomen, dass eine Kette von Geradensegmenten, die mit geringem Knickwinkel aufeinander folgen, vom Betrachter wie eine stetige Kurve wahrgenommen wird. Es ist möglich, durch Knicke die Form der Kanten zu gestalten. Im Extremfall sind Knickanzahl und Knickwinkel derart ausgewogen, dass der Eindruck einer geschwungenen Kurve entsteht und die Knicke nicht als solche erkannt werden. Auch auf weniger extreme Weise können Knicke genutzt werden, um ästhetische Vorteile in Graphzeichnungen zu erzielen. In welcher Weise das ästhetische Potential von Knicken genutzt wird, hängt wesentlich von der verwendeten Energiefunktion ab.

Abbildung 5.34 zeigt, wie durch die Einführung von Knicken neues Optimierungspotential bezüglich der Rundheit entsteht und ausgenutzt wird, sodass sich ein organischer Kantenfluss ergibt.

Dieser Effekt kann positiv und negativ eingeordnet werden: Ein organischer Kantenfluss entspricht eher der Art und Weise, wie ein Mensch den Graphen zeichnen würde. Andererseits kann man argumentieren, dass geradlinige Kanten der Struktur des Graphen besser gerecht werden und dass hier Details visualisiert werden, die der Graph nicht hergibt.

5.3.2 Adaption verschiedener Verfahren

Ein wesentlicher Vorteil der Erweiterung von PEO um Kreuzungen und Knicke ist es, dass das Verfahren dadurch bemächtigt wird, jegliche Art von Polygonlinienzeichnungen zu öffnen und zu optimieren.

Die nachfolgenden Untersuchungen zeigen am Beispiel eines planaren Graphen die Adaption verschiedener Zeichenverfahren zur Nachbearbeitung. Die Nachbearbeitung verwendet harte Kreuzungsbegradigung. Dies bietet sich an, da die Kreuzungen in den Ursprungszeichnungen begradigt sind. Bei Zeichnungen, in denen keine Knicke verwendet werden, erfolgt zum Vergleich auch eine Nachbearbeitung durch das Verfahren von Bertault. Es wird die Energiekonfiguration E_{Alln} verwendet, die eine Vielzahl von Optimierungszielen aggregiert.

5.3.2.1 Nachbearbeitung einer geradlinig planaren Zeichnung

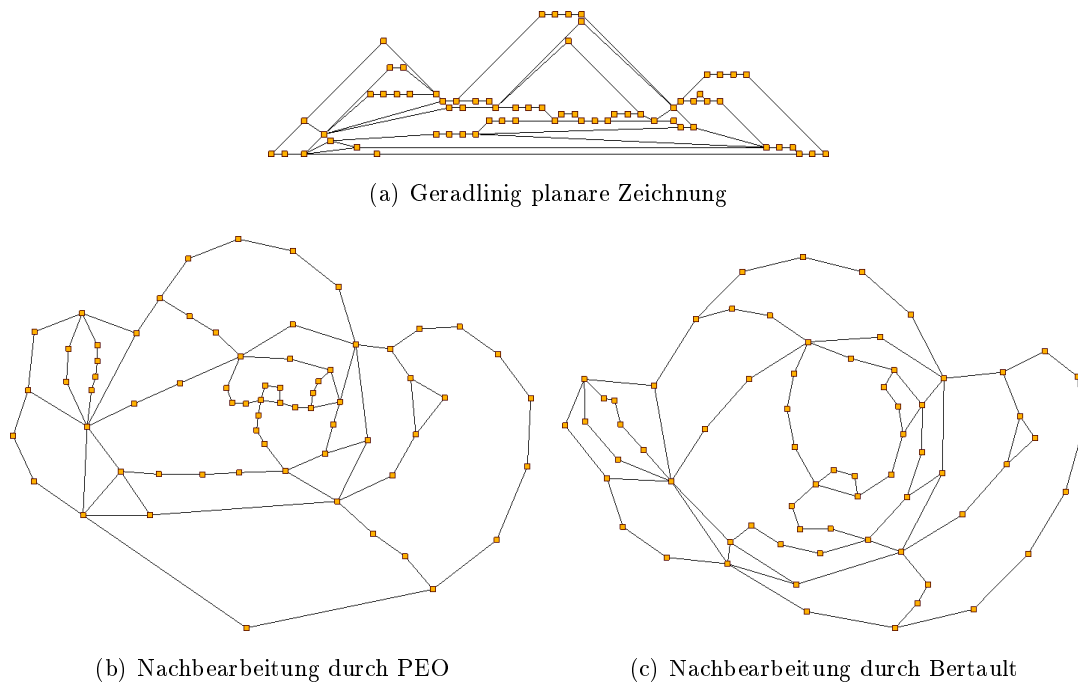


Abbildung 5.35: Nachbearbeitung einer geradlinig planaren Zeichnung.

Die geradlinig planare Zeichnung in Abbildung 5.35(a) zeigt typische Nachteile geradlinig planarer Zeichnungen: starke Unterschiede in den Kantenlängen, kleine Winkel und eine schlechte Entzerrung.

Abbildung 5.35(b) zeigt die Nachbearbeitung durch PEO, welche diese Unzulänglichkeiten zuverlässig beseitigt. Der Einfluss der Energiekomponenten wird deutlich: Die Zeichnung ist gut separiert und weist rundliche Gebiete auf. Auch die Kanten haben eine ähnliche Länge. Auffällig ist der Knoten ganz unten, um den sich zwei sehr lange Kanten befinden.

Dies ist auf die Wirkung von VFREEDOM zurückzuführen: Da die beiden Kanten in horizontaler Richtung eine weite Strecke überbrücken, wird der Knoten nach unten verschoben, um ihn angemessen vom Restgraphen zu separieren.

Die Zeichnung in Abbildung 5.35(c) zeigt die Nachbearbeitung durch das Verfahren von Bertault. Auch hier wird eine gute Qualität der Zeichnung erreicht. Die Zeichnung ist gut separiert und enthält rundliche Gebiete. Kanten weisen eine ähnliche Länge auf.

5.3.2.2 Nachbearbeitung einer kräftebasierten Zeichnung

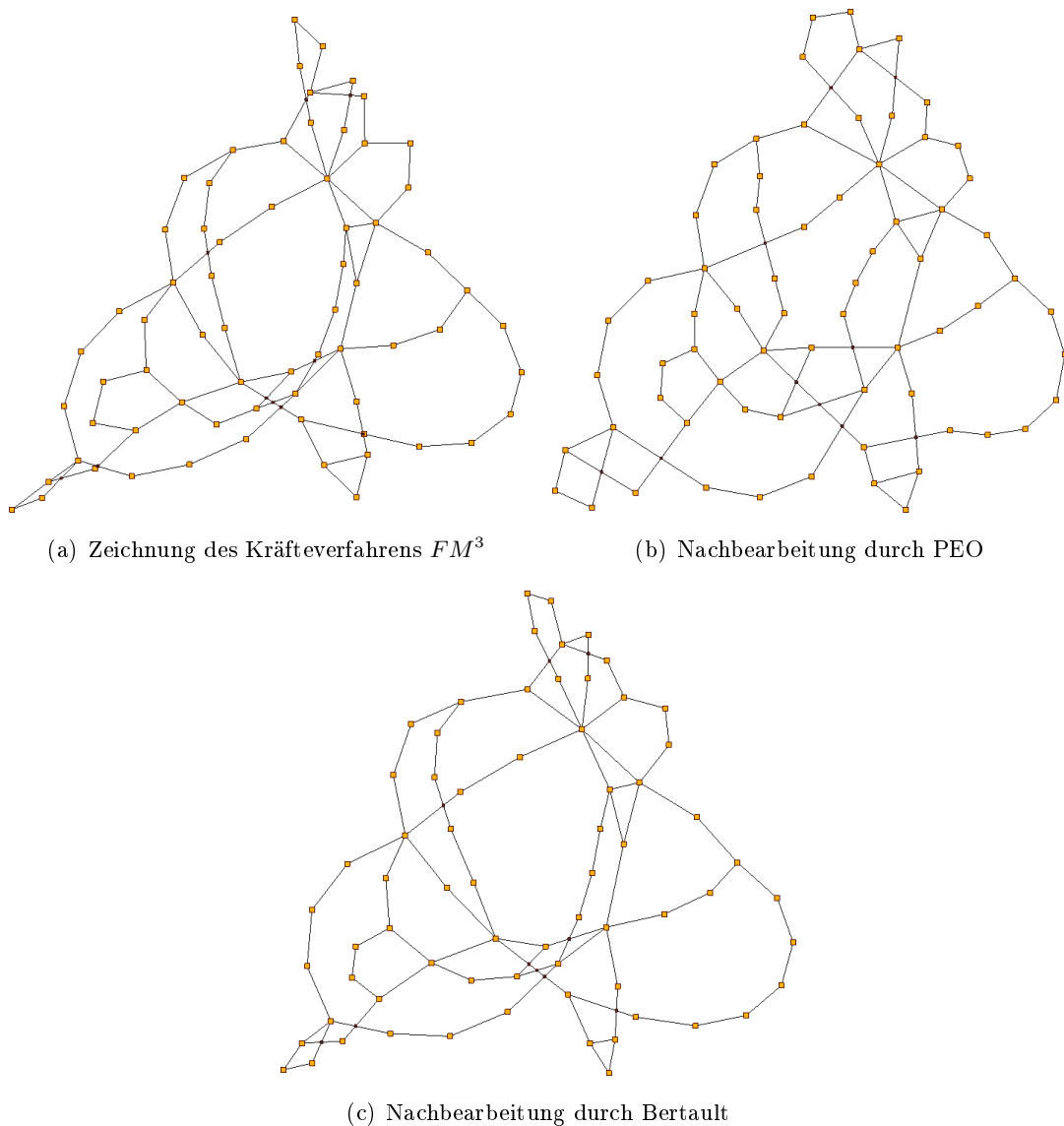


Abbildung 5.36: Nachbearbeitung einer Zeichnung des Kräfteverfahrens FM^3 .

Abbildung 5.36(a) zeigt eine Zeichnung des Kräfteverfahrens FM^3 [16]. Die Zeichnung weist zehn Kreuzungen auf. Besonders fatal ist der geringe Abstand zwischen Kreuzun-

gen und Knoten, der sich hier mehrfach beobachten lässt. Ein Extremfall ist am unteren Ende der Zeichnung zu sehen: Rechts über dem Dreieck befindet sich eine Kreuzung, die in der initialen Zeichnung mit einem Knoten zusammenfällt. So wird unweigerlich das Missverständnis erzeugt, der besagte Knoten sei mit den Endknoten der kreuzenden Kante verbunden. Außerdem fällt auf, dass an den äußeren Enden der Zeichnungen starke abstoßende Kräfte wirken. Unten links und oben richten sich die Knoten sehr länglich aus.

Abbildung 5.36(b) zeigt die Nachbearbeitung der Zeichnung durch PEO. Die explizite Berücksichtigung der Kreuzungsknoten ist deutlich erkennbar. Diese sind wesentlich besser separiert. Auch die Dreiecke und andere Gebiete, die im Zusammenhang mit Kreuzungen entstehen, werden angemessen rund gezeichnet. Die Zeichnung erscheint insgesamt weniger gedrungen.

Die Nachbearbeitung durch das Verfahren von Bertault in Abbildung 5.36(c) beinhaltet nur wenige Änderungen im Vergleich zur Ausgangszeichnung. Die länglichen Stellen im Graphen sind weiterhin länglich. Allerdings wird der Einfluss der abstoßenden Kräfte zwischen Knoten und Kanten sichtbar. Durch diese Kräfte werden Knoten von benachbarten Kreuzungen separiert.

Im unteren Teil der Zeichnung kreuzt eine Kante drei weitere Kanten. Dort zeigt sich ein Unterschied in der Behandlung von Kreuzungen durch PEO und das Verfahren von Bertault. Bei PEO wird jedes der Kreuzungssegmente so optimiert, dass die Länge des Segmentes der Länge einer typischen Kante ähnlich ist. Bei Bertault wird die Kante nur minimal durch die Abstoßung der kreuzenden Kanten verlängert. Zwischen den Kreuzungen wirken keine Kräfte. Dadurch liegen die Kreuzungen nah beieinander.

5.3.2.3 Nachbearbeitung einer hierarchischen Zeichnung

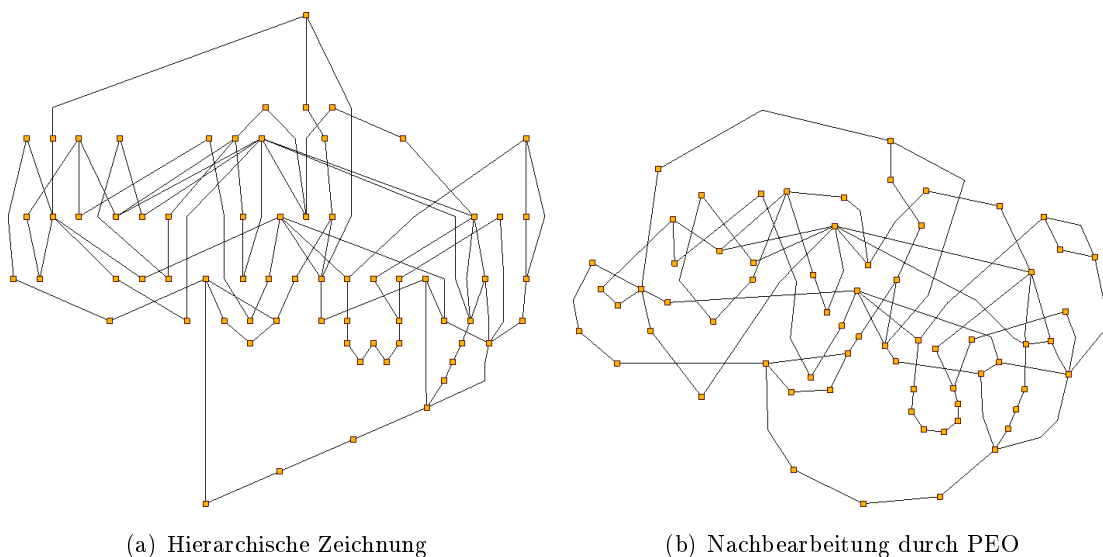


Abbildung 5.37: Nachbearbeitung einer hierarchischen Zeichnung.

Die hierarchische Zeichnung in Abbildung 5.37(a) weist besonders viele Kreuzungen auf. Besonders auffällig sind wenige Kanten, die seitlich verlaufen und eine Vielzahl von Kreuzungen erzeugen. Eine Kante, die zudem noch stark geknickt wird, erzeugt sieben Kreuzungen. Hinsichtlich der Planarität des Graphen macht dies deutlich, dass Einschränkungen in den Zeichenkonventionen starke Implikationen für die Anzahl der Kreuzungen haben können.

Abbildung 5.37(b) zeigt die Zeichnung nach der Nachbearbeitung. Die Zeichenkonventionen werden hier mangels einer Formalisierung durch die Energiefunktion durchbrochen. So wird der Knick oben in der Zeichnung nach oben gerichtet, um eine stärkere Rundheit zu bewirken. Auch die Schichtzuweisung ist aufgelöst. Es wird ersichtlich, dass das Verfahren die Positionen und Abstände der Kreuzungen explizit berücksichtigt: Geringe Abstände von Kreuzungen und kleine Winkel werden entzerrt. Auch Flächen, die durch Kreuzungsknoten entstehen, bekommen im Rahmen der Einschränkungen gemäß der Rundheit und der Umfangsgerechtigkeit eine angemessene Form zugewiesen. Die Knickwinkel der Kante, die sehr viele Kreuzungen induziert, werden verringert. Die Qualität der Zeichnung wird dennoch maßgeblich durch die Kreuzungen gestört. Da bei PEO keine nachträgliche Reduktion der Kreuzungszahl vorgesehen ist, bekräftigt dies die Relevanz der Kreuzungsminimierung vor Anwendung des Verfahrens.

5.3.2.4 Nachbearbeitung einer orthogonalen Zeichnung

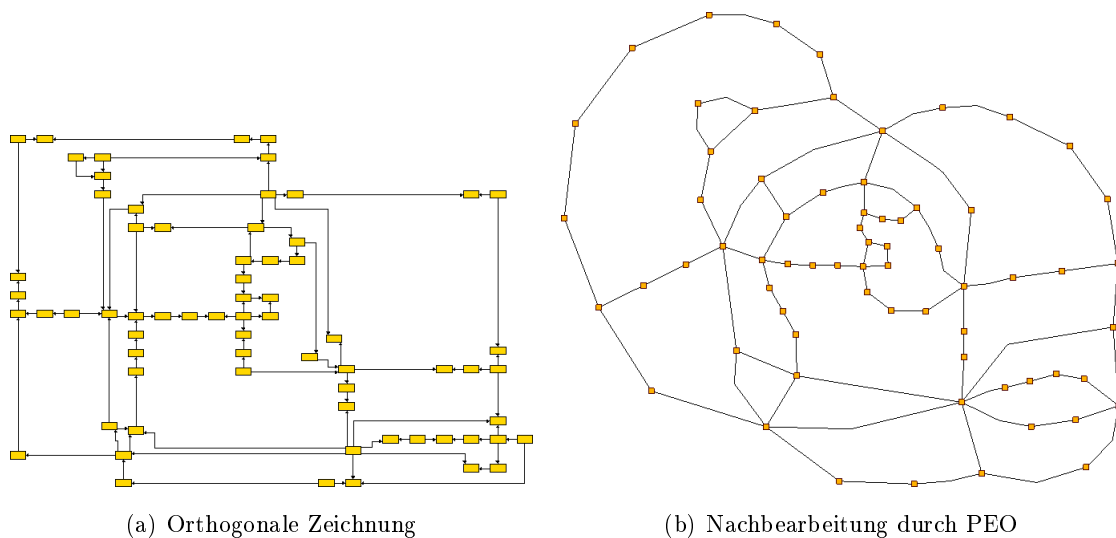


Abbildung 5.38: Nachbearbeitung einer orthogonalen Zeichnung.

Zuletzt zeigt Abbildung 5.38(a) die Zeichnung des Graphen durch ein orthogonales Zeichenverfahren. Da der Graph planar ist, weist die Zeichnung keinerlei Kreuzungen auf. Jedoch enthält die Zeichnung einige Knicke.

Abbildung 5.38(b) enthält die Optimierung der Zeichnung durch PEO. Dabei wird ein ebenso gutes Ergebnis erzielt wie bei der planaren Ausgangszeichnung in Abbildung 5.35(b). Die Knicke werden nicht aufgelöst, sondern gewinnbringend genutzt, um Gebiete runder erscheinen zu lassen oder Knoten besser zu separieren. Hier zeigt sich der Einfluss der Komponenten $C_{ROUND_{GM}}$ und $V_{FREEDOM_{GM}}$. An Stellen, an denen ein Knick nur geringen Mehrwert bringt, wird der Knickwinkel zu Gunsten der Komponente $V_{ANGLE_{SIM_{GM,MD}}}$ verringert. Ein prüfender Blick auf die Zeichnung offenbart, dass hier keine Verschiebungen erforderlich wären, um alle Knicke zu begradigen und dennoch die Gültigkeit zu erhalten.

5.3.3 Knickentfernung

Interessant ist die Frage, wie sich orthogonale Zeichnungen entwickeln, die viele Knicke aufweisen. Im Hinblick auf ein geradliniges Verfahren ist die Entfernung der Knicke wünschenswert. Dazu wird die Knickentfernung aus Abschnitt 3.5.2.3 exemplarisch untersucht.

Konfiguration zur Knickentfernung. Um dem Erfolg der Knickentfernungen Vorschub zu leisten, wird die Energiefunktion um eine stark gewichtete Komponente zur Verringerung der Knickwinkel erweitert. Insgesamt wird die folgende Konfiguration verwendet:

$$E := GM([1, E_{AllIn}], [1, BEND_{ANGLE_{SIM_{GM,MD}}}] \quad (5.9)$$

5.3.3.1 Orthogonale Zeichnung mit vielen Knicken

Abbildung 5.39 dokumentiert die erfolgreiche Optimierung einer orthogonalen Zeichnung durch diese Konfiguration. Die orthogonale Zeichnung verwendet rechteckige Knoten. Zur Konvertierung wurden die Befestigungspunkte der Kanten an den Knoten als Knicke eingeführt und mit dem Knotenzentrum verbunden. Abbildung 5.39(a) enthält die initiale Zeichnung. Es zeigt sich, dass wenige Knoten hohen Grad haben. Einige Kanten werden um die gesamte Zeichnung herum geführt.

Nach $50 \cdot |V|$ Iterationen (Vergleich (b)) ist die Form der Zeichnung rundlicher. Die orthogonale Zeichenkonvention ist aufgelöst. Einige Knicke sind entfernt, was jedoch wegen der Verwendung der Andockpunkte als nutzbringende Knicke wenig auffällig ist.

Nach $100 \cdot |V|$ Iterationen (Vergleich (c)) ist die Knickzahl allerdings deutlich reduziert. Besonders triviale Knicke, die der orthogonalen Zeichenkonvention zuzurechnen sind, aber keine überbrückende Funktion hatten, sind entfernt. Der Knoten mit hohem Grad rechts außen zeigt den Einfluss der Knickwinkelkomponente: In Abbildung (b) sind die Knickwinkel der Kanten dieses Knoten noch groß und die Knicke können nicht entfernt werden. Viele nach links ausgerichtete Kantensegmente beschränkten zudem die Bewegungsfreiheit

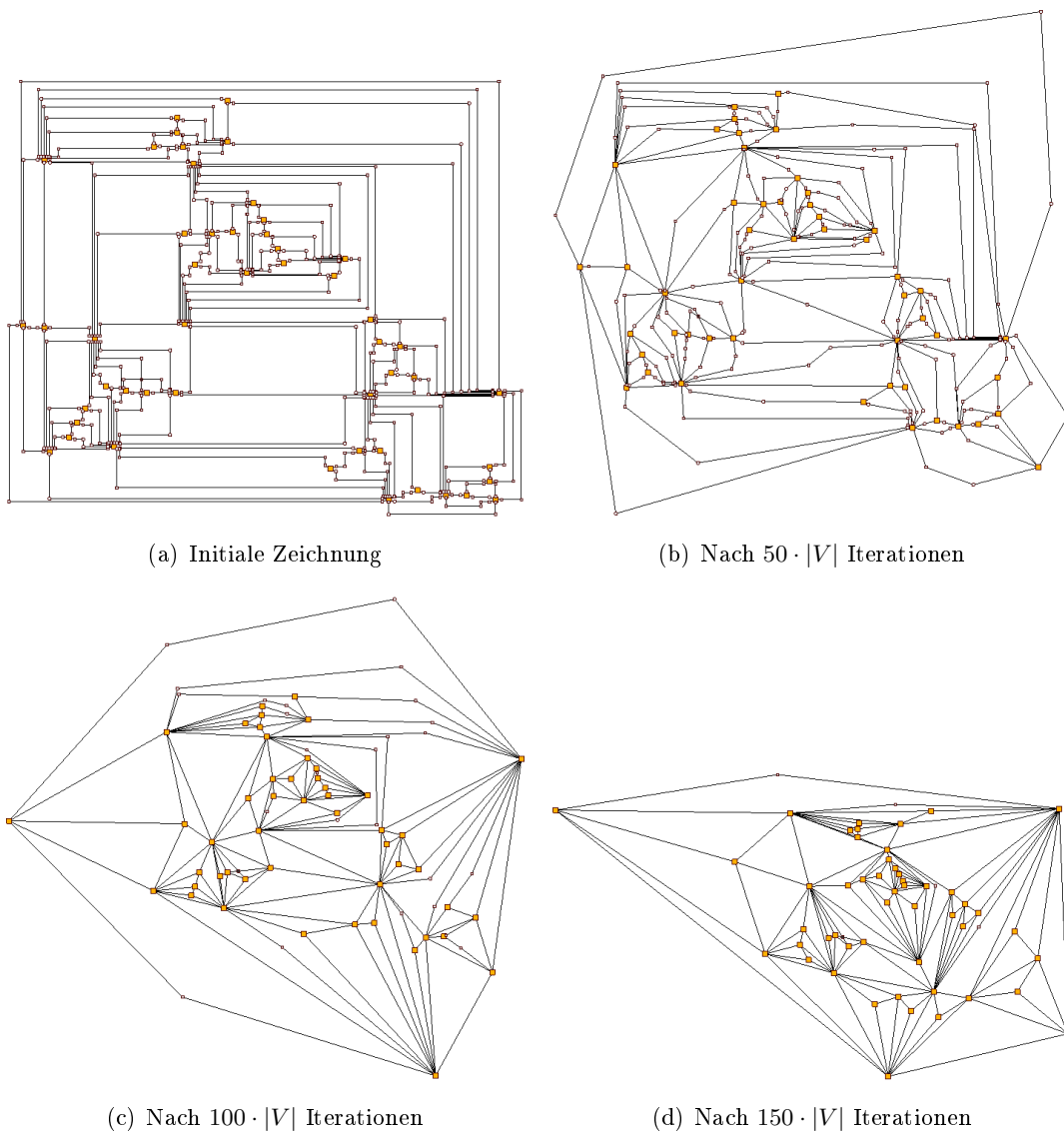


Abbildung 5.39: Erfolgreiche Anwendung von Knickentfernung als Variation bei einem Graphen mit vielen Knicken.

des Knotens nach oben. Da sich das Gewicht der Knickwinkelkomponente aufgrund der schrumpfenden Anzahl der Knicke auf immer weniger Knicke verteilt und die Gültigkeit dies erlaubt, wird der Knoten nach oben verschoben.

Die Begradigung der Knickwinkel ermöglicht auch das Auflösen ursprünglich sehr komplexer Knicke: Nach $150 \cdot |V|$ Iterationen enthält die Zeichnung nur noch drei Knicke (Vergleich (d)). Im weiteren Verlauf verschiebt sich der für die Knicke verantwortliche Knoten wegen der starken Gewichtsballung der Knickwinkelbegradigung weiter nach rechts oben. Nach $210 \cdot |V|$ Iterationen sind schließlich alle Knicke begradigt.

Es ist erfreulich, dass alle Knicke entfernt werden können. Angesichts des hohen Grades vieler Knoten und der Tatsache, dass einige Kanten mit einer Knickwinkelsumme von 270

Grad um die gesamte Zeichnung herum geführt werden, dokumentiert dies das Potential der Konfiguration.

5.3.3.2 Vollständiger Graph mit acht Knoten

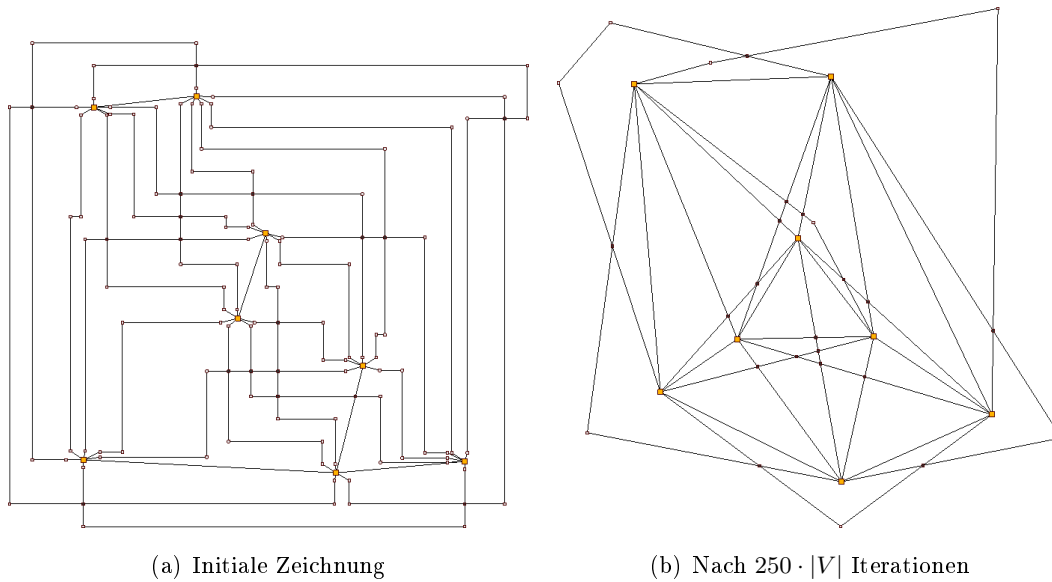


Abbildung 5.40: Erfolgreiche Anwendung von Knickentfernung als Variation bei dem Graphen K_8 .

Abbildung 5.40(a) zeigt eine orthogonale Zeichnung des Graphen K_8 . Dies ist ein Graph mit acht Knoten, wobei alle Knotenpaare durch Kanten verbunden sind. Die orthogonale Zeichnung erzeugt 18 Kreuzungen. Abbildung 5.40(b) zeigt die Zeichnung nach $250 \cdot |V|$ Iterationen Optimierung zur Knickentfernung. Es wird deutlich, dass viele Knicke entfernt werden können. Jedoch befinden sich besonders außen einige Knicke, deren Entfernung komplexe Verschiebungssequenzen erfordert, die von der Präferenz der Energiefunktion nicht unterstützt werden. Trotz der vielen abhängigen Kreuzungsknoten gelingt es, einen entsprechenden Anteil der Knicke zu entfernen.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Diplomarbeit ist der Planare Energie-Optimierer (PEO) entwickelt worden, ein energiebasiertes Verfahren zur Optimierung geradlinig planarer Graphzeichnungen. Geeignete Variationsoperatoren erzeugen kreuzungsfreie Nachfolgezeichnungen mit unveränderter planarer Einbettung. Diese werden durch eine Energiefunktion bewertet und die Zeichnung mit dem höchsten Energiewert für die weitere Optimierung übernommen.

Einen Schwerpunkt bildet die Entwicklung von Energiekomponenten, die Ästhetikkriterien für Graphzeichnungen formalisieren. Die wichtigsten Komponenten werden nachfolgend aufgeführt.

- $\text{CROUND}_{\text{GM}}$ bewirkt die Rundheit der sichtbaren Kreise und hat eine entfaltende Wirkung. Die sichtbaren Kreise sind aufgrund der fixierten Einbettung bekannt.
- ELSIM_{MD} bewirkt ähnliche Kantenlängen.
- $\text{VFREEDOM}_{\text{GM}}$ bewirkt die Separation der Knoten. Für jeden Knoten wird der minimale Abstand zu einem Objekt ins Verhältnis zur durchschnittlichen Kantenlänge um den Knoten gesetzt.
- $\text{VANGLESIM}_{\text{GM,MD}}$ bewirkt ähnliche Winkel um die Knoten.
- $\text{IDEALDISTANCE}_{\text{MD}}$ bewirkt die Annäherung der Distanzen von Knotenpaaren an die Länge eines kürzesten Pfades zwischen den Knoten.

Die Normierung der Energiekomponenten auf den gemeinsamen Wertebereich $[0, 1]$ ermöglicht das Zusammenführen verschiedener Optimierungsziele. Die Energiekomponenten können unverändert auf planarisierte Graphen angewendet werden, bei denen Kantenkreuzungen durch Kreuzungsknoten ersetzt werden. Die Begradigung der Winkel um Kreuzungsknoten wird wirksam durch die Variation oder die Energiefunktion erreicht.

In experimentellen Studien wurde gezeigt, dass sich PEO sehr gut für die Nachbearbeitung geradlinig planarer Zeichnungen eignet. Derartige Zeichnungen zeigen oft kleine

Winkel und große Unterschiede in den Kantenlängen. Zudem ist die Form der Zeichnungen häufig dreieckig und Knoten sind schlecht separiert. Mischkonfigurationen von PEO sind besonders auf zweizusammenhängenden Graphen sehr erfolgreich, da Kantenlängen angeglichen, Knoten besser separiert und Gebiete rundlich gezeichnet werden. Insbesondere ist die Endzeichnung planar – bei Zeichnungen kräftebasierter Verfahren entstehen nicht selten Kantenkreuzungen.

Bei einigen Zeichnungen werden sehr lange Kanten nicht hinreichend verkürzt. Dies kann vermutlich durch ein neues Ähnlichkeitsmaß erreicht werden, das Ausreißer nach oben wirkungsvoll bestraft und dennoch sinnvoll auf das Intervall $[0, 1]$ normiert ist. Bei ersten Versuchen unter Verwendung der Varianz erweist sich die Normierung als besondere Herausforderung.

Einige Zeichnungen von nicht zweizusammenhängenden Graphen werden bisher nicht hinreichend entfaltet. Dadurch müssen viele Knoten auf engem Raum gezeichnet werden und es kommt zu schlechter Separation oder kurzen Kanten. Bei Davidson und Harel [9] und Bertault [6] stoßen sich Knoten noch über weite Entfernungen hinweg ab. Interessant wäre eine Komponente, die eine solche kontinuierliche Abstoßung zwischen Knoten eines Gebietes realisiert. Auch bei dieser Komponente sollte der Wertebereich auf das Intervall $[0, 1]$ beschränkt sein – idealerweise wandelt eine monotone Funktion mit Wertebereich $[0, 1]$ Distanzen in einen Erfülltheitsgrad der Separation um. Für eine Distanz d und eine Referenzlänge L könnte eine Funktion wie diese verwendet werden:

$$\text{SEP}(d, L) = \frac{d}{d + L} \quad (6.1)$$

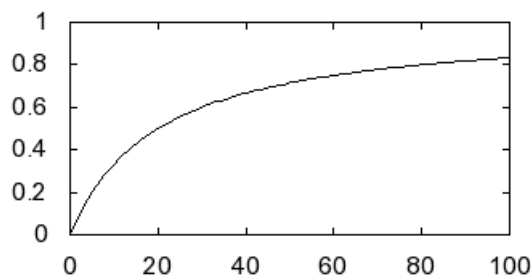


Abbildung 6.1: Kurvenverlauf einer denkbaren kontinuierlichen Separationsfunktion $\text{SEP}(d, 20)$, die im Wertebereich $[0, 1]$ bleibt.

Abbildung 6.1 zeigt den Verlauf der Funktion $\text{SEP}(d, 20)$ für $d \in [0, 100]$. Eine kontinuierliche Separationskomponente kann vermutlich auch bei nicht zweizusammenhängenden Graphen eine bessere Entfaltung der Zeichnung bewirken.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Der Planare Energie-Optimierer optimiert planare Zeichnungen mit energie-basierten Methoden.	2
2.1	Ein Graph, die Zerlegung des Graphen in Blöcke und der zugehörige BC-Baum.	6
2.2	Zwei Einbettungen eines Graphen.	7
2.3	Verschiedene Ansätze zum Zeichnen von Graphen.	8
2.4	Zeichnung des Verfahrens von de Fraysseix, Pach und Pollack [10].	10
2.5	Zeichnung des Verfahrens von Tutte [27].	11
2.6	Zeichnungen des Verfahrens von Kamada und Kawai [19].	13
2.7	Zeichnungen des Verfahrens von Davidson und Harel [9].	13
2.8	Zonen beim Kräfteverfahren von Bertault [6].	15
2.9	Ein Polygon und die konvexe Hülle des Polygons.	16
3.1	Explizite Beschreibung der gültigen Punktmenge bei der Verschiebung eines einzelnen Knotens.	24
3.2	Blocktransformation am Beispiel einer verschachtelten Zeichnung.	25
3.3	Beispiel zur Identifikation der sichtbaren Kreise.	35
3.4	Gegenüberstellung eines regulären Polygons mit einem konkaven, länglichen Polygon mit gleicher Knotenzahl.	36
3.5	Schlechte Knoten/Kanten-Separation trotz guter Knoten/Knoten-Separation.	38
3.6	Beispiel zur Berechnung von $V_{\text{FREEDOM}}(v)$	38
3.7	Winkel um einen Knoten.	39
3.8	Verdeutlichung der Komponente $\text{IDEALDISTANCE}_{\approx}$	40
3.9	Planarisierung durch Einfügen von Kreuzungsknoten.	41
3.10	Kantenlängenähnlichkeit bei planarisierten Graphen.	42
3.11	Ohne Begradigung sind unübersichtliche Knicke in den Kreuzungsknoten nicht ausgeschlossen.	42
3.12	Harte Begradigung von Kreuzungsknoten: Beim Verschieben der Endknoten wandern die Kreuzungsknoten mit.	43

3.13	Winkel zur weichen Begradigung um Kreuzungsknoten.	44
4.1	Zeichnung und der zugehörige Energiebaum zur Komponente $VELSIM_{\oplus, \approx}$	48
5.1	Degeneriertes Verhalten bei alleiniger Anwendung von Konvexitätsmaßen.	55
5.2	Konvexität bedarf der Ergänzung durch andere Energiekomponenten.	56
5.3	Optimierung eines nach innen gebogenen Kreises durch $CROUND_{GM}$	57
5.4	Optimierung einer händischen Zeichnung durch $CROUND_{GM}$	57
5.5	Optimierung einer geradlinig planaren Zeichnung durch $CROUND_{GM}$	58
5.6	Die Optimierung von $CCIRCLEFIT_{GM}$ führt zu rundlichen Gebieten und zu schlechter Separation.	59
5.7	Endergebnisse und Kantenlängenverlaufskurven zur Optimierung reiner $ELSIM$ -Konfigurationen mit unterschiedlichen Ähnlichkeitsmaßen.	60
5.8	Globale Auswirkungen auf die Kantenlängenähnlichkeit bei der Optimierung einer Kette mit $VELSIM_{GM, MIN/MAX}$	63
5.9	Gegenbeispiel zur Entstehung globaler Auswirkungen.	64
5.10	Zusammenhang zwischen $VFREEDOM_{GM}$ und $VELSIM_{GM, MIN/AM}$	65
5.11	Verlaufskurven zur Optimierung von $VFREEDOM$ mit unterschiedlichen Lagemaßen.	66
5.12	Zeichnungen bei der Optimierung von $VFREEDOM$ mit unterschiedlichen Lagemaßen nach $100 \cdot V $ Iterationen.	67
5.13	Stabile Zeichnungen bei der Optimierung von $VFREEDOM_{GM}$, die gegen eine alleinige Verwendung der Komponente sprechen.	69
5.14	Optimierung mit Schwerpunkt auf $VANGLESIM_{GM, MIN/AM}$	70
5.15	Einer auf Winkeln und Kantenlängen basierenden Konfiguration fehlt ein Konstrukt zur Separation.	72
5.16	Der Erfolg einer reinen $IDEALDISTANCE$ -Konfiguration hängt wesentlich von der gewählten Einbettung ab.	73
5.17	Schlechte Separation bei der Komponenten $IDEALDISTANCE_{MQ}$ kann durch Beimischen der Komponente $VFREEDOM_{MIN}$ verhindert werden.	74
5.18	Geradlinig planare Zeichnung eines Baumes.	77
5.19	Baumzeichnungen des Verfahrens von Bertault.	78
5.20	Baumzeichnungen der Konfigurationen E_{AllIn} , E_{Bicon} und $E_{FreeSim}$	79
5.21	Baumzeichnungen der Konfigurationen E_{ID} und $IDEALDISTANCE_{MD}$	81
5.22	Zeichnungen eines triangulierten Graphen mit hohen Knotengraden.	83
5.23	Zeichnung mit langen horizontalen Kanten.	84
5.24	Optimierung einer Zeichnung mit langen horizontalen Kanten durch das Verfahren von Bertault.	84
5.25	Anfangsphase der Optimierung einer Zeichnung mit langen horizontalen Kanten durch PEO.	85

5.26	Versperrungseffekte bei der Optimierung einer Zeichnung mit langen horizontalen Kanten durch PEO.	85
5.27	Durchbruch bei der Optimierung einer Zeichnung mit langen horizontalen Kanten durch PEO.	86
5.28	Endergebnis der Optimierung einer Zeichnung mit langen horizontalen Kanten durch PEO.	87
5.29	Zeichnungen eines zweizusammenhängenden Graphen.	88
5.30	Zeichnungen eines Sierpinski-Dreiecks mit Rekursionstiefe vier und veränderter Einbettung.	91
5.31	Zeichnungen eines Graphen mit verschachtelten Brücken.	93
5.32	Platzmangel wegen schlechter Entfaltung.	94
5.33	Verschiedene Formen der Begradigung.	96
5.34	Organischer Kantenfluss durch das Zusammenspiel von Knicken und Rundheit.	97
5.35	Nachbearbeitung einer geradlinig planaren Zeichnung.	98
5.36	Nachbearbeitung einer Zeichnung des Kräfteverfahrens FM^3	99
5.37	Nachbearbeitung einer hierarchischen Zeichnung.	100
5.38	Nachbearbeitung einer orthogonalen Zeichnung.	101
5.39	Erfolgreiche Anwendung von Knickentfernung als Variation bei einem Graphen mit vielen Knicken.	103
5.40	Erfolgreiche Anwendung von Knickentfernung als Variation bei dem Graphen K_8	104
6.1	Kurvenverlauf einer denkbaren kontinuierlichen Separationsfunktion $SEP(d, 20)$, die im Wertebereich $[0, 1]$ bleibt.	106

Literaturverzeichnis

- [1] CGAL, *Computational Geometry Algorithms Library*. <http://www.cgal.org/>.
- [2] GDE, *Go Visual Diagram Editor*. <http://www.oreas.com/>.
- [3] OGDF, *Open Graph Drawing Framework*. <http://www.ogdf.net/>.
- [4] SFML, *Simple and Fast Multimedia Library*. <http://www.sfml-dev.org/>.
- [5] BATINI, C., E. NARDELLI und R. TAMASSIA: *A layout algorithm for data flow diagrams*. IEEE Transactions on Software Engineering, 12(4):538–546, 1986.
- [6] BERTAULT, F.: *A Force-Directed Algorithm that Preserves Edge Crossing Properties*. In: *GD '99: Proceedings of the 7th International Symposium on Graph Drawing*, Seiten 351–358, London, UK, 1999. Springer-Verlag.
- [7] CHROBAK, M. und G. KANT: *Convex grid drawings of 3-connected planar graphs*. International Journal of Computational Geometry and Applications, 7(3):211–223, 1997.
- [8] CHROBAK, M. und TH PAYNE: *A linear-time algorithm for drawing a planar graph on a grid*. Information Processing Letters, 54(4):241–246, 1995.
- [9] DAVIDSON, R. und D. HAREL: *Drawing graphs nicely using simulated annealing*. ACM Transactions on Graphics, 15(4):301–331, 1996.
- [10] DE FRAYSSEIX, H., J. PACH und R. POLLACK: *How to draw a planar graph on a grid*. Combinatorica, 10(1):41–51, 1990.
- [11] EADES, P.: *A heuristic for graph drawing*. Congressus numerantium, 42:149–160, 1984.
- [12] FARY, I.: *On straight line representing of planar graphs*. Acta Scientiarum Mathematicarum, 11:229–233, 1948.
- [13] FERSCHL, F.: *Deskriptive Statistik*. Physica-Verlag Heidelberg, 1985.

- [14] GRAHAM, R.L. und F. YAO: *Finding the convex hull of a simple polygon*. Journal of Algorithms, 4:324–331, 1983.
- [15] GUTWENGER, C. und P. MUTZEL: *Graph embedding with minimum depth and maximum external face*. Lecture notes in computer science, 2912:259–272, 2003.
- [16] HACHUL, S. und M. JÜNGER: *Drawing Large Graphs with a Potential-Field-Based Multilevel Algorithm*. In: *Graph drawing: 12th international symposium, GD 2004, New York, NY, USA, September 29-October 2, 2004: revised selected papers*, Seiten 285–295. Springer Verlag, 2005.
- [17] HOPCROFT, J. und R. TARJAN: *Algorithm 447: efficient algorithms for graph manipulation*. Communications of the ACM, 16(6):372–378, 1973.
- [18] JÜNGER, M. und P. MUTZEL: *Graph Drawing Software*. Springer, 1 Auflage, 2003.
- [19] KAMADA, T. und S. KAWAI: *An algorithm for drawing general undirected graphs*. Information Processing Letters, 31(1):7–15, 1989.
- [20] KIRKPATRICK, S., CD GELATT und MP VECCHI: *Optimization by Simulated Annealing*. Science, 220(4598):671–680, 1983.
- [21] MINGQIANG, Y., K. KIDIYO und R. JOSEPH: *A Survey of Shape Feature Extraction Techniques*. Pattern Recognition Techniques, Technology and Applications, Seiten 978–953, 2008.
- [22] PUGH, W.: *Skip lists: a probabilistic alternative to balanced trees*. Communications of the ACM, 33(6):668–676, 1990.
- [23] SCHNYDER, W.: *Embedding planar graphs on the grid*. In: *Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, Seiten 138–148. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 1990.
- [24] STEIN, SK: *Convex maps*. Proceedings of the American Mathematical Society, 2:446–466, 1951.
- [25] SUGIYAMA, K., S. TAGAWA und M. TODA: *Methods for visual understanding of hierarchical system structures*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 11(2):109–125, 1981.
- [26] TAMASSIA, R., G. DI BATTISTA und C. BATINI: *Automatic graph drawing and readability of diagrams*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 18(1):61–79, 1988.
- [27] TUTTE, W.T.: *How to draw a graph*. Proceedings of the London Mathematical Society, 13(3):743–768, 1963.

- [28] WAGNER, K.: *Bemerkung zum Vierfarbenproblem*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 46:26–32, 1936.
- [29] WELZL, E.: *Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids)*. New Results and New Trends in Computer Science, 555:359–370, 1991.
- [30] ZUNIC, J. und P.L. ROSIN: *A convexity measurement for polygons*. In: *British Machine Vision Conference*, Band 24, Seiten 173–182, 2002.

